Plongements des espaces métriques dans les espaces de Banach.

Florent Baudier

Plongements des espaces métriques dans les espaces de Banach

Florent BAUDIER

02 février 2009

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé sous la direction du Professeur Gilles Lancien. Que dire... Difficile de trouver directeur plus disponible, chaleureux et compétent pour s'initier et se frotter au monde si ardu mais si exaltant de la recherche en mathématiques pures. C'est avec une sincérité non feinte et un plaisir tout particulier que je le remercie pour ces années on ne peut plus agréables, tant au niveau intellectuel que relationnel, à travailler et évoluer à ses côtés.

C'est aussi un immense plaisir pour moi de voir réunis MM. Robert Deville, Gilles Godefroy, Nigel J. Kalton, Pierre Pansu et Éric Ricard au sein de mon jury de thèse. C'est un grand honneur qu'ils me font.

Un merci tout particulier à Robert Deville et Nigel Kalton pour avoir si gentiment accepté de rapporter sur mon travail de thèse.

Au cours de ces dernières années j'ai eu l'occasion et le privilège de rencontrer et d'échanger avec de nombreux mathématiciens dont certains ont porté un intérêt spécial à mes travaux. Je voudrais notamment citer Gideon Schechtman et Assaf Naor, avec qui parler de mathématiques est toujours enrichissant, et tout particulièrement Éric Ricard et Yves Dutrieux, pour leurs remarques toujours très avisées, ainsi qu'Alain Valette, à qui je n'ai certainement pas encore fini de demander des explications concernant la fameuse conjecture de Baum-Connes !

Je ne peux terminer ces remerciements en oubliant mes colocataires du bureau 401 version “ancienne garde“, Dimitri, Jean, Seb, Stefan et version ”nouvelle vague“, Karine, Alexis et Olivier.

Il est bien sûr évident que mes années passées au laboratoire de mathématiques de Besançon n'auraient pas été aussi douces sans la bonne humeur et l'accompagnement constant des Catherines, de Monique, Odile, Jacques, Philippe et Richard. J'ai aussi énormément apprécié la vie quotidienne au sein de l'Équipe d'Analyse Fonctionnelle, dont le mélange et les échanges multiples entre les ”commutatifs“ et les ”non commutatifs“ ont permis au novice que j'étais d'acquérir une culture scientifique et une ouverture d'esprit dont je vais essayer de profiter pleinement. Ce fut très enrichissant.

Mes dernières pensées iront tout naturellement à mes amis, ils se reconnaîtront, et à ma famille qui a su me donner toutes les clefs pour m'épanouir pleinement et que j'essaie d'utiliser avec profit. Je ne lui en serai jamais assez reconnaissant...

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Résumé de la thèse

Le thème central de cette thèse est le plongement des espaces métriques dans les espaces de Banach. Il existe divers types de plongements, notre attention s'étant principalement portée sur les plongements grossiers, uniformes ou Lipschitziens. Ces trois types de plongements apparaissent dans des domaines mathématiques très variés.

Les plongements uniformes ou Lipschitziens (aussi appelés plongements métriques) entre espaces de Banach, considérés comme des espaces métriques avec la distance canonique induite par leur norme, ont été étudiés très en détail depuis une quarantaine d'années. La compréhension précise de ces plongements joue un rôle essentiel dans les problèmes de classifications uniforme ou Lipschitzienne des espaces de Banach. Sous l'impulsion de célèbres mathématiciens, Y. Benyamini, P. Enflo, S. Heinrich, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, P. Mankiewicz, M. Ribe, G. Schechtman, pour ne citer qu'eux, de nombreux problèmes de classification non linéaire ont été résolus. Cependant la classification Lipschitzienne de c_0 résista pendant un bon nombre d'années. Ce n'est que très récemment, au début des années 2000, que G. Godefroy, N. J. Kalton et G. Lancien [36] ont montré que si c_0 est Lipschitz-isomorphe à un espace de Banach X, alors c_0 est linéairement isomorphe à X. Néanmoins le problème suivant reste toujours ouvert :

Question 1 : Si c_0 se plonge Lipschitziennement dans un espace de Banach X, c_0 se plonge-t-il nécessairement linéairement dans X ?

Une réponse par l'affirmative à cette question, impliquerait que la réciproque du théorème d'Aharoni, qui stipule que c_0 est universel pour la classe des espaces métriques séparables, soit vraie. On remarquera que cette question peut se formuler en termes de plongements Lipschitziens des espaces métriques.

Un autre vaste champ d'investigation est ce que M. Mendel et A. Naor appellent "le programme de Ribe" dans [71]. Les propriétés locales des espaces de Banach, i.e les propriétés ne faisant intervenir qu'un nombre fini de vecteurs, doivent pouvoir être caratérisées de façon purement métrique. Parmi les travaux fondateurs de J. Bourgain, il est prouvé qu'un espace de Banach est super-réflexif, si et seulement si, il ne contient pas uniformément métriquement les arbres dyadiques hyperboliques de hauteur n (la distortion est indépendante de n). Ceci nous invite à poser la question suivante :

Question 2 : Quelles sont les propriétés locales des espaces de Banach que l'on peut caractériser à l'aide d'un invariant métrique ?

Depuis longtemps, l'étude des espaces métriques finis est fortement connectée à la théorie des espaces vectoriels normés de dimension finie. Il s'avère qu'elle possède aussi des liens forts et utiles avec la combinatoire (d'un point de vue géométrique), l'analyse de données et la théorie des graphes. Par exemple, la meilleure approximation que l'on peut obtenir pour un célèbre problème de théorie des graphes, le problème général du Sparsest Cut, coïncide exactement avec la plus petite distortion, avec laquelle on peut plonger Lipschitziennement les espaces métriques finis de type négatif dans L_1. Cette théorie est quantitative. Le problème est non seulement de construire des plongements, mais en plus de contrôler leur distortion, avec comme objectif de la rendre la plus petite possible. Nous renvoyons à [67] pour une synthèse des problèmes ouverts dans ce domaine et au Chapitre 15 du livre de J. Matoušek [68] pour un exposé détaillé et accessible de ce sujet qui ne sera pas traité dans ce mémoire.

Les plongements grossiers sont un outil clé pour l'étude de plusieurs conjectures célèbres (la conjecture de Baum-Connes grossière, la conjecture de Novikov grossière) qui interviennent, lorsque que l'on essaie de généraliser, à des variétés Riemanniennes non compactes, le Théorème de l'Indice de Atyah-Singer. G. Yu a mis en lumière l'utilisation des plongements grossiers dans [93], où il démontre qu'un espace métrique à géométrie bornée se plongeant grossièrement dans un espace de Hilbert vérifie la conjecture de Baum-Connes grossière. Ultérieurement, G. Yu et G. Kasparov [50] ont découvert un théorème analogue relatif à la conjecture grossière de Novikov et aux plongements grossiers dans les espaces de Banach super-réflexifs. Ces résultats sont à la base d'un large spectre de questions, dont ce que nous allons appeler question 3 fait partie.

Question 3 : Quels sont les espaces métriques se plongeant grossièrement dans des espaces de Banach possédant de "bonnes" propriétés telles que la super-réflexivité ou la réflexivité ?

Le premier résultat significatif semble provenir des travaux de N. Brown et E. Guenter [21]. Ils ont prouvé que tout espace métrique à géométrie bornée se plonge grossièrement dans l'espace de Banach réflexif $(\sum_n \ell_{p_n})_{\ell_2}$, où $1 < p_n < \infty$ et p_n tend vers $+\infty$. En toute généralité, ce résultat est faux si on remplace la réflexivité de l'espace but par la super-réflexivité. En effet, V. Lafforgue [54] a exhibé un espace métrique à géométrie bornée, ne se plongeant dans aucun espace de Banach super-réflexif. Une quantité importante de travail dans cette direction a été effectuée par N. J. Kalton dans [47]. Il y montre que tout espace métrique stable se plonge grossièrement et uniformément dans un espace de Banach réflexif, et concernant l'autre direction, que c_0 ne se plonge ni grossièrement ni uniformément dans un espace de Banach réflexif. En ce qui concerne le plongement uniforme, ce résultat résout un très vieux problème ouvert en théorie des espaces de Banach. Il est donc naturel de poser la question suivante :

Question 4 : Quels sont les espaces métriques qui se plongent uniformément dans des espaces de Banach super-réflexifs ou réflexifs ?

Au cours de cette thèse, nous répondons aux questions 3 et 4 pour une classe assez large d'espaces métriques, et à la question 2 pour plusieurs propriétés locales. Nous étudions aussi la difficile question 1 au travers de deux sous-questions relativement plus accessibles, énoncées à la section 4.4, auxquelles nous donnons des réponses partielles.

Après avoir compilé, dans la section 2, des résultats élémentaires et les outils indispensables de géométrie des espaces Banach, utilisés tout au long de ce mémoire, on donne lors de la section 3 des réponses partielles aux deux sous-questions de la question 2. En introduction, nous détaillons le "programme de Ribe", et ensuite nous présentons quelques résultats préliminaires relatifs à la super-réflexivité. Le reste de la section 3 est divisé en trois parties. La première fournit un bref exposé des différentes notions de type et cotype non linéaires, qui sont des exemples fondamentaux de manifestations concrètes du "programme de Ribe". Dans une seconde partie, on montre qu'un espace de Banach X n'est pas super-réflexif, si et seulement si, l'arbre dyadique hyperbolique infini se plonge Lipschitziennement dans X. Pour ce faire, nous introduisons et utilisons une technique de recollement. Finalement, pour $1 \leqslant p < \infty$, nous démontrons que si X contient uniformément les ℓ_p^n, alors l'arbre dyadique infini, noté B_∞, muni d'une distance d_p

inspirée de la norme sur ℓ_p, se plonge métriquement dans X. En combinant ce résultat et les travaux de J. Bourgain, V. Milman et H. Wolfson [19] on en déduit une caractérisation du type linéaire de X pour $1 \leqslant p < 2$, au moyen du plongement Lipschitzien de l'arbre (B_∞, d_p). En corollaire nous obtenons que tout espace de Banach de dimension infinie contient une copie métrique de (B_∞, d_2).

La section 4, motivée par la recherche d'espaces universels, traite essentiellement des espaces métriques localement finis. On donne des exemples classiques d'espaces universels et on rappelle les propriétés de base des espaces $\mathcal{L}_p$. L'utilisation des espaces $\mathcal{L}_p$ permet de généraliser un théorème de l'auteur et G. Lancien [10], et un théorème de M. I. Ostrovskii [75]. Le principal résultat de cette section est le suivant :
tout sous-ensemble localement fini d'un espace $\mathcal{L}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ se plonge métriquement dans n'importe quel espace de Banach qui contient uniformément les ℓ_p^n.
La dernière partie de la section est étroitement liée avec la réciproque du théorème d'Aharoni [1] et question 1. En effet, la question 1 est équivalente à un problème de plongement :
est-ce qu'un espace de Banach, métriquement universel pour la classe des espaces métriques séparables, doit nécessairement contenir une copie linéaire de c_0 ?
Comme nous l'a fait remarquer G. Schechtman, si un espace de Banach est métriquement universel pour les espaces métriques finis, alors il doit contenir tous les espaces ℓ_∞^n, c'est-à-dire qu'il ne doit pas posséder un cotype linéaire non trivial. Ainsi on obtient la caractérisation suivante, des espaces de Banach sans cotype linéaire :
X n'a pas de cotype non trivial, si et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout espace métrique (M, d) localement fini, M se plonge Lipschitziennement dans X, avec la distortion universelle C.

Dans la section 5 nous nous focalisons sur les plongements grossiers et uniformes des espaces métriques à boules relativement compactes, appelés espaces métriques propres. La sous-section introductive a pour but de motiver notre étude des plongements grossiers et uniformes, et de présenter les exemples canoniques, issus de la théorie des groupes, d'espaces à géométrie bornée. Ensuite nous discutons des résultats de plongements dans les espaces de Banach réflexifs. Dans la sous-section 5.3 nous énonçons et démontrons le résultat principal de la section 5 à savoir :
pour tout espace métrique propre M et tout espace de Banach sans cotype X, il existe un plongement de M dans X qui soit simultanément grossier et uniforme (plongement fortement uniforme).

Le cas particulier des sous-ensembles propres des espaces $\mathcal{L}_p$ est analysé, et en corollaire du résultat sur les sous-ensembles localement finis (section 4) nous montrons que tout sous-ensemble propre d'un espace $\mathcal{L}_p$ admet un plongement grossièrement bi-Lipschitz dans n'importe quel espace de Banach qui contient uniformément les ℓ_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. La fin de la section est consacrée à différentes remarques de G. Schechtman, N. J. Kalton et É. Ricard, que nous étudions avec attention.

La section 6 traite de travaux en cours, relatifs à l'étude du plongement métrique des arbres à branchements dénombrables. Après avoir défini les arbres généraux, les arbres sur les espaces de Banach, et les arbres métriques, on introduit deux indices d'épluchage (indice de dentabilité et indice de Szlenk), et un indice ordinal du type de l'indice ℓ_1 de Bourgain. Ce dernier type d'indice ordinal sert à quantifier la présence d'une sous-structure ℓ_1 dans un espace de Banach. On montre qu'un espace de Banach X, possédant une base inconditionnelle et un indice de Szlenk strictement supérieur au premier ordinal dénombrable infini ω, contient une copie métrique des arbres hyperboliques à branchements dénombrables de hauteur n, avec une distortion uniforme en n. On donne ensuite un plongement quasi-isométrique des arbres à branchements dénombrables de hauteur finie dans $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_{1+\frac{1}{k}}\right)_{\ell_2}$, et en utilisant la technique de recollement on en déduit le plongement dans ce même espace, de l'arbre infini correspondant.

L'annexe A concerne ce que nous appelons "le contre-exemple d'Aharoni". Nous rappelons la preuve du fait que ℓ_1 ne peut pas se plonger dans c_0 avec une distortion strictement plus petite que 2. Ensuite nous décrivons les améliorations successives de la distortion avec laquelle on peut plonger tous les espaces métriques séparables dans c_0. On définit la dérivation de Cantor pour les espaces compacts et nous prouvons que si ℓ_1 se plonge métriquement dans un espace $C(K)$ avec une distortion $2-\epsilon$, avec $\epsilon > 0$, alors le compact K est au moins d'ordre 2. Dans le même esprit, on montre que si ℓ_1 se plonge dans un espace $C(K)$ avec distortion $1+\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$, alors K est au moins d'ordre ω, le premier ordinal dénombrable.

L'annexe B rappelle brièvement la définition de la propriété de Radon-Nikodým et quelques propriétés qui lui sont reliés. Ensuite on énonce des théorèmes fondamentaux pour la classification Lipschitzienne des espaces de Banach. Les techniques de différentiation sont introduites et discutées, en particulier la différentiation préfaible des applications Lipschitzienne. On utilise cet outil pour donner une preuve d'une remarque de Kalton, affirmant qu'un espace de Banach métriquement universel pour les espaces métriques compacts doit contenir une copie linéaire de c_0 dans son bidual, et donc une copie linéaire complémentée de ℓ_1 dans son dual.

L'étude du plongement Lipschitzien des arbres dyadiques, qui constitue la section 3, est parue dans *Archiv der Mathematik* [9]. Les articles [10], publié dans *Proceedings of the American Mathematical Society*, et [8] qui à été soumis, contiennent tous les résultats des sections 4 et 5. La section 6 regroupe des résultats récents, encore non publiés, de travaux en cours.

1.2 Abstract

The central theme of this thesis is the embedding of metric spaces into Banach spaces. The embeddings can be different in nature. In this work we mainly focus on coarse, uniform or Lipschitz embeddings. These embeddings occur in different fields.

The uniform embeddings or Lipschitz embeddings (often called metric embeddings) between Banach spaces, considered with their canonical metric structure, have been intensively studied during the last 40 years. A better understanding of these embeddings plays a important role in the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces. Many nonlinear classification problems have been solved, spurred on by the work of famous mathematicians like, Y. Benyamini, P. Enflo, S. Heinrich, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, P. Mankiewicz, M. Ribe, G. Schechtman, for instance. But the Lipschitz classification of c_0 resisted for a long time. This was solved by G. Godefroy, N. J. Kalton and G. Lancien [36] in early 2000. Nevertheless the following problem is always open :

Question 1 : If c_0 Lipschitz embeds into a Banach space, does it necessarily linearly embed into it ?

A positive answer to this question would imply that the converse statement of Aharoni's theorem [1], which asserts that c_0 is metrically universal for the class of separable metric spaces, is true. This question can be expressed in terms of Lipschitz embedding of metric spaces.

Another vaste field of investigation is what M. Mendel and A. Naor called the "Ribe program" in [71]. Local properties of Banach spaces, i.e properties involving only a finite number of vectors, should have a purely metric characterization. In J. Bourgain's pionnering works, it is showed that a Banach space is superreflexive, if and only if, it does not contain uniformly metrically the hyperbolic binary trees of height n (the distortion is independant of n). This leads to the following question :

Question 2 : Which local properties of a Banach space can we characterize with the help of a metric invariant ?

So far the study of finite metric spaces has had substantial connections with the theory of finite-dimensional normed spaces. It even turns out that it has strong and useful ties with combinatorics (from a geometric point of view), data analysis and graph theory. For instance, the approximation ratio achieved for a celabrated problem in graph theory, the general Sparset

Cut problem, is known to coincide exactly with the best possible distortion achievable for the Lipschitz embedding of finite metric spaces of negative type into L_1. This theory is quantitative in nature. The issue is not only to construct an embedding, but an embedding with the least distortion. We refer to [67] for a collection of open problems in this area and to Chapter 15 of J. Matoušek's book [68] for an extensive and comprehensive survey of this topic that will not be treated in this memoir.

The coarse embeddings are a key tool in the study of several famous conjectures (coarse Baum-Connes conjecture, coarse Novikov conjecture...) that arise in an attempt to generalize the Index Theorem of Atyah-Singer, to non compact Riemannian manifolds. This was put into light by G. Yu in [93], where he proved that a metric space with bounded geometry statifies the coarse Baum-Connes conjecture if it coarsely embeds into a Hilbert space. Afterwards G. Yu and G. Kasparov [50] stated an analogue theorem about the coarse Novikov conjecture and coarse embeddings into superreflexive Banach spaces. These results have opened a broad field of investigation. Namely,

Question 3 : Which metric spaces coarsely embed into Banach spaces that share some "nice" properties as superreflexivity or reflexivity ?

The first significant result seems to emanate from the work of N. Brown and E. Guenter [21], who showed that every metric space with bounded geometry coarsely embeds into the reflexive Banach space $(\sum_n \ell_{p_n})_{\ell_2}$, where $1 < p_n < \infty$ and p_n tends to $+\infty$. In full generality, this can not be true if we replace the reflexivity of the target space by superreflexivity. Actually, V. Lafforgue [54] exhibited a metric space with bounded geometry which does not embed into any superreflexive Banach space. A great amount of work in this direction has been done by N. J. Kalton in [47]. He proved that every stable metric space coarsely and uniformly embeds into a reflexive Banach space, and in the other direction, that c_0 does not uniformly or coarsely embed into a reflexive Banach space. Concerning uniform embedding, this result settles a longstanding open problem in the theory of Banach spaces. So it is natural to ask :

Question 4 : Which metric spaces uniformly embed into superreflexive or reflexive Banach spaces ?

Throughout this thesis we answer questions 3 and 4 for a large class of metric spaces, and question 2 for several local properties. We also study two subquestions, stated in subsection 4.4, of the hard question 1 and give partial answers.

After we have compiled, in Section 2, some basic facts and the relevant material on the geometry of Banach spaces, used throughout this memoir, we give in Section 3 some partial answers to two subsquestions of question 1. In introduction, we detail the "Ribe program", and then we present some preliminaries about superreflexivity. The rest of Section 3 is divided into three parts. The first one provides an brief exposition of the various notions of non linear type and cotype, which are fundamental examples of concrete outward signs of "Ribe program". In the second part, we prove that a Banach space X is non-superreflexive, if and only if, the infinite hyperbolic binary tree metrically embeds into X. To this end, we introduce and use a gluing technique. Finally, we show that if $1 \leqslant p < \infty$ and X uniformly contains the ℓ_p^n's, then the infinite binary tree, denoted by B_∞, endowed with a "ℓ_p-like" distance d_p, metrically embeds into X. Combining this result and the work of J. Bourgain, V. Milman and H. Wolfson [19] we deduce a characterization of the linear type of X for $1 \leqslant p < 2$, in term of the metric embedding of (B_∞, d_p). As a corollary we prove that every infinite dimensional Banach space contains a metric copy of (B_∞, d_2).

The Section 4, motivated by the search for universal spaces, deals essentialy with locally finite metric spaces. We give some classical examples of universal spaces and we recall some basic properties of the $\mathcal{L}_p$-spaces. The use of $\mathcal{L}_p$-spaces permits to generalize a theorem of the author and G. Lancien [10], and a theorem of M. I. Ostrovskii [75]. The main result of this section is the following :
every locally finite subsets of a $\mathcal{L}_p$-space $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ metrically embed into any Banach space which contains uniformly the ℓ_p^n's.
The last part of the section is closely related with the converse statement of the theorem of Aharoni [1], and so with question 1. Actually, question 1 is equivalent to an embedding problem :
does a Banach space, which is metrically universal for the class of all separable metric spaces, necessarily contain a linear copy of c_0 ?
As pointed out to us by G. Schechtman, if a Banach space is metrically universal for the finite metric spaces, then it must contains the ℓ_∞^n, i.e it has no non-trivial linear cotype. So we have this characterization of the linear cotype of a Banach space :

X has no non trivial cotype, if and only if, there exists $C > 0$ such that for all locally finite metric spaces (M, d), M metrically embeds into X, with the universal distortion C.

Section 5 focuses on coarse and uniform embeddings of proper metric spaces (every closed ball is compact). The introductory subsection is intended to motivate our investigation of coarse and uniform embeddings, and it

presents canonical examples, from group theory, of bounded geometry spaces. Then we discuss embedding results into reflexive Banach spaces. In the subsection 5.3 we state and prove the main result of Section 5 that is :
for any proper metric space M and any Banach space without cotype X, there exists an embedding which is simultaneously coarse and uniform (a strong uniform embedding) from M into X. The case of proper subsets of $\mathcal{L}_p$-spaces is analysed, and as a corollary of the result about the locally finite subsets (Section 4) we prove that every proper subset of a $\mathcal{L}_p$-space has a coarse bi-Lipschitz embedding into any Banach space which contains uniformly the ℓ_p^n's ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). The end of the section is devoted to various remarks of G. Schechtman, N. J. Kalton and É. Ricard that we study carrefuly.

Section 6 deals with work under progress, related to the study of metric embedding of countably branching trees. First of all we define general trees, trees on a Banach space and metric trees. Then we introduce two peeling indices (the dentability index and the Szlenk index) and a local ℓ_1-index of the same type as the Bourgain ℓ_1 index. This last type of ordinal index gives a quantitative manner to study the complexity of the ℓ_1 substructure of a Banach space. We show that a Banach space X, with an unconditional basis and a Szlenk index stricly bounded below by ω, contains a metric copy of the countably branching hyperbolic tree of height n, with a uniform distortion in n. We construct a quasi-isometric embedding of the countably branching trees of finite height in the space $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_{1+\frac{1}{k}}\right)_{\ell_2}$, and using the gluing technique we deduce an embedding, in the same space, of the corresponding infinite tree.

Annexe A is concerned with what we call "the counter-example of Aharoni". We recall the proof of the fact that ℓ_1 does not metrically embed into c_0 with a distortion strictly smaller than 2. Then we describe the subsequent improvement of the value of the distortion with which we can embed every separable metric space into c_0. We define the Cantor's derivation for compact spaces and we prove that if ℓ_1 embeds into $C(K)$ with distortion $2-\epsilon$ for some $\epsilon > 0$, then the compact K is of order at least 2. In the same vein we show that if ℓ_1 embeds into $C(K)$ with distortion $1+\epsilon$ for every $\epsilon > 0$, then K is of order at least ω, the first countable ordinal.

Annexe B recalls briefly the Radon-Nikodým property and some related facts, and gives the fundamental theorems from the Lipschitz classification of Banach spaces. The differentiation techniques are discussed and we focus mainly about the $w*$-differentiation of the Lipschitz functions. We make use of this tool to give a proof of Kalton's remark, that a Banach space metrically universal for the class of all compact metric spaces, must contain a linear copy of c_0 in its bidual, hence a complemented linear copy of ℓ_1 in its dual.

The study of the metric embedding of the binary trees, constituting Section 3, has appeared in *Archiv der Mathematik* [9]. The articles [10], published in *Proceedings of the American Mathematical Society*, and [8], which has been submitted, contain the results of Sections 4 and 5. Section 6 is work under progress.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre introductif est destiné à fixer les notations et à définir les propriétés et les outils fondamentaux en géométrie des espaces de Banach. Sauf mention spéciale les espaces de Banach seront toujours supposés réels. Un espace de Banach X est un espace vectoriel normé complet, dont la norme sera notée $\|\|_X$. On omettra l'indexation lorsque aucune confusion ne sera possible.
L'ensemble $B_X(x,r) := \{y \in X; \|x-y\|_X < r\}$ est appellé *boule ouverte centrée en $x \in X$ de rayon $r > 0$*. Dans le cas où $r = 1$, on notera simplement B_X la *boule unité*. La *sphère unité*, i.e les éléments de norme 1, sera quant à elle notée S_X.
L'ensemble des ordinaux finis est noté ω. C'est aussi le premier ordinal infini. L'ensemble des ordinaux dénombrables est noté ω_1. C'est aussi le premier ordinal non dénombrable.
On supposera connues les bases de la théorie de la mesure et des probabilités, que l'on peut trouver dans le livre de D. Li et H. Queffélec [81]. En ce qui concerne la théorie des espaces métriques et la théorie linéaire des espaces de Banach on renvoie le lecteur aux ouvrages classiques [86], [61], [62] et [2]. Les notations introduites sont principalement celles du Handbook of the geometry of Banach spaces [43].

2.1 Espaces de Banach et définitions classiques

Les espaces de suites ℓ_p :

A toute suite de réels $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, lorsque $1 \leqslant p < \infty$, on associe la quantité finie ou infinie $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \|x\|_p < \infty\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach noté ℓ_p.

De même si $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$, l'espace de Banach ℓ_∞ est le sous-espace $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \|x\|_\infty < \infty\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On notera c_0 le sous-espace de Banach de ℓ_∞ des suites qui convergent vers 0.
Lorsque l'on se limitera aux suites finies de taille n, les espaces de dimension finie correspondants seront notés respectivement ℓ_p^n et ℓ_∞^n.
On notera c_{00} le sous-espace de c_0 des suites à support fini, c'est-à-dire les suites ayant un nombre fini de coordonnées non nulles. Le *support* d'une suite x sera noté $\mathrm{supp}(x)$.

Les espaces de fonctions L_p :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction $\mathcal{F}-$mesurable, on définit

$$\begin{aligned} &\text{si } 1 \leqslant p < \infty && \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\text{et si } p = \infty && \|f\|_\infty = \inf \left\{ m > 0; \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-m, m])) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'espace $L_p(\Omega, \mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions $\mathcal{F}-$mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$. Dans le cas particulier où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue, $L_p(\Omega, \mu)$ sera simplement noté $L_p([0,1])$ ou L_p. On retrouve les espaces ℓ_p, lorsque l'on muni $\Omega = \mathbb{N}$ de la tribu grossière et de la mesure de comptage.

Espaces de fonctions continues sur un compact :

Soit K un espace topologique compact. On désigne par $C(K)$, l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Sommes d'espaces de Banach :

Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'espaces de Banach. Soit Y un des espaces c_0 ou ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. On définit un nouvel espace de Banach noté $\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right)_Y$ (éventuellement $\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right)_p$ si $Y = \ell_p$) de la façon suivante :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right)_Y = \left\{ x \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n \ ; \ x = (x_n)_{n \geqslant 0} \ \textit{et} \ z \in Y \text{ avec } z = (\|x_n\|_{X_n})_{n \geqslant 0} \right\}$$

Si $X_n = X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $\ell_p(X)$ ou $c_0(X)$ l'espace obtenu.

On termine cette section en rappelant quelques définitions classiques. On notera $B(X,Y)$ l'espace des applications linéaires continues entre les espaces de Banach X et Y. Si $T \in B(X,Y)$, $\|T\| := \sup_{x\in S_X} \|T(x)\|$ définit une norme sur $B(X,Y)$ qui en fait un espace de Banach.
Lorsque $Y = \mathbb{R}$ on parlera du dual topologique de X, noté communément X^*.

On peut définir une "distance" entre deux espaces de Banach isomorphes, appelée distance de Banach-Mazur et notée d_{BM}, comme étant l'infimum de la quantité $\|T\| \centerdot \|T^{-1}\|$ pris sur tous les isomorphismes linéaires T entre X et Y. Cependant on remarquera que si l'on veut définir une distance entre X et Y il faut prendre le logarithme de d_{BM}.

Pour $p \in [1,\infty]$, on dit qu'un espace de Banach X *contient uniformément les* ℓ_p^n s'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout entier n, X contient un sous-espace Y de dimension n tel que $d_{BM}(\ell_p^n, Y) \leqslant C$.

Si $\mathcal{U}$ est un ultra-filtre non trivial sur $\mathbb{N}$ et X un espace de Banach, on définit l'ultra-produit $X_{\mathcal{U}}$ comme étant le quotient de $\ell_\infty(X)$ par le sous-espace $c_{o,\mathcal{U}}(X)$ constitué des suites $(x_n)_{n=1}^\infty$ de X telles que $\lim_{n\in\mathcal{U}} \|x_n\| = 0$. $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = \lim_{n\in\mathcal{U}} \|x_n\|$ définit une semi-norme sur $\ell_\infty(X)$, et une norme sur l'ultra-produit $X_{\mathcal{U}}$ de façon canonique.

2.2 Géométrie des espaces de Banach

L'appellation générique "géométrie des espaces de Banach" sous-entend : étude des propriétés des espaces de Banach liées à la géométrie de la boule unité définie par la norme. Certaines propriétés linéaires se "lisent" à travers l'aspect géométrique de la boule unité. Nous définissons deux propriétés géométriques centrales des normes, puis des propriétés linéaires qui y sont reliées.

2.2.1 Propriétés géométriques des normes

Uniforme convexité

Définition 2.2.1. *Soit X un espace de Banach de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $0 < \varepsilon \leqslant 2$, le module de convexité de X, noté δ_X, est défini par*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|;\ x,y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

X est uniformément convexe *si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

L'uniforme convexité est une propriété géométrique de la norme. Elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente. Par exemple les espaces ℓ_p^n, pour $1 < p < \infty$, sont uniformément convexes, alors que ℓ_1^n et ℓ_∞^n ne le sont pas. Or tous ces espaces sont isomorphes en tant qu'espaces de même dimension finie.

Les espaces uniformément convexes jouissent de "bonnes" propriétés linéaires. En particulier on peut montrer assez facilement qu'un espace de Banach uniformément convexe est automatiquement réflexif.

Uniforme lissité

L'uniforme convexité admet une notion duale appelée uniforme lissité.

Définition 2.2.2. *Soit $\tau > 0$, le module de lissité de X, noté ρ_X, est défini par :*

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 \; ; \; x, y \in X, \; \|x\| = 1, \; \|y\| = \tau \right\}.$$

X est uniformément lisse *si* $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$.

La proposition suivante exprime la dualité entre l'uniforme convexité et l'uniforme lissité.

Proposition 2.2.3. *Soit X un espace de Banach, alors :*
X est uniformément convexe si et seulement si X^* est uniformément lisse.

Il est utile de quantifier le degré d'uniforme convexité. On dira qu'un espace de Banach X est *p-uniformément convexe* s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^p$ pour tout $\varepsilon \in [0, 2]$. Il existe une formulation homogène qui caractérise la p-uniforme convexité.

Proposition 2.2.4. *X est p-uniformément convexe, si et seulement si, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x, y \in X$:*

$$2\|x\|^p + \frac{2}{K^p}\|y\|^p \leqslant \|x+y\|^p + \|x-y\|^p.$$

La plus petite constante K qui vérifie cette inégalité est appelée *constante de p-uniforme convexité*. Bien évidemment, on a une définition et un résultat similaires relatifs à l'uniforme lissité.

Remarque 2.5 L'identité du paralélogramme dans les espaces de Hilbert exprime que L_2 est uniformément convexe, et on peut montrer que pour tout espace de Banach X, on a $\delta_X \leqslant \delta_{L_2}$.

2.2.2 Type linéaire et cotype linéaire

Dans un espace de Hilbert H on dispose de l'identité du parallélogramme généralisée pour n points $x_1, \ldots, x_n \in H$,

$$\frac{1}{2^n} \left\| \sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}^n} \epsilon_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

où la première somme s'effectue sur tous les choix de signes possibles.

Cette moyenne sur tous les choix de signes possibles peut être formulée à l'aide du langage probabiliste. En effet les choix de signes $(\epsilon_i)_{i=1}^n$ peuvent être considérés comme une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher. Les variables aléatoires de Rademacher sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé quelconque, et prenant la valeurs 1 ou -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. L'identité précédente devient donc

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance d'une variable aléatoire.

Introduisons maintenant les notions de type linéaire et de cotype linéaire, appelées aussi type ou cotype de Rademacher. Elles sont basées sur des relaxations de l'identité du parallélogramme généralisée. Ces deux notions fournissent un outil puissant en théorie linéaire des espaces de Banach et sont fortement liées à la géométrie de l'espace. Elles ont été introduites par B. Maurey au début des années 70, mais c'est l'article fondamental de Maurey et Pisier [69], en 1976, qui les propulsa sur le devant de la scène.

Définition 2.2.6. *Soit* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Un espace de Banach* X *a le* type linéaire p *s'il existe une constante* C *telle que pour tout ensemble fini de vecteurs* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *dans* X,

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La plus petite constante qui vérifie l'inégalité précédente est appelée constante de type p *de* X *et notée* $T_p(X)$. *On dit aussi que* X *est de type* p.

De même, pour $2 \leqslant q \leqslant \infty$, un espace de Banach X est dit de cotype linéaire q *(X a cotype q) s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

avec $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$ qui remplace $(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q)^{\frac{1}{q}}$ lorsque $q = \infty$.
La plus petite constante qui vérifie l'inégalité précédente est appelée constante de cotype q *de X et notée $C_q(X)$.*

Il est important de noter que l'exposant intervenant du coté où est situé l'espérance, joue un rôle inerte grâce aux inégalités de Khintchine-Kahane [45]. Il peut donc être choisi arbitrairement.
En prenant les vecteurs tous égaux à un vecteur de norme 1, on remarque que nécessairement, $p \leqslant 2$ et $q \geqslant 2$.
Il est clair que grâce à l'inégalité triangulaire, un espace de Banach est trivialement de type linéaire 1 et de cotype linéaire ∞.
Le type et le cotype linéaires sont des notions stables par isomorphisme linéaire et par passage à un sous-espace.

Le lien entre le type, ou le cotype, et la géométrie de l'espace est synthétisé dans le résultat suivant que l'on doit à T. Figiel et G. Pisier [35]

Théorème 2.2.7 (Figiel-Pisier)**.** *Soit X un espace de Banach,*

i) Si X est q-uniformément convexe ($2 \leqslant q$), alors X a le cotype q.

ii) Si X est p-uniformément lisse ($1 \leqslant p \leqslant 2$), alors X a le type p.

Un espace de Hilbert est de type et de cotype 2 (avec $T_2 = C_2 = 1$). Ceci se montre directement, en interprétant l'égalité du parallélogramme généralisée en termes probabilistes. On remarquera aussi qu'un espace de Hilbert est 2-uniformément convexe et 2-uniformément lisse, d'après l'égalité du parallélogramme.
Réciproquement, un résultat de S. Kwapień [53] affirme qu'un espace de Banach de type et de cotype 2 est isomorphe à un espace de Hilbert. Le type et le cotype permettent de mesurer à quel point un espace ressemble ou non à un espace de Hilbert.

Le type linéaire et le cotype linéaire sont des notions "duales", au vue de la proposition précédente. Cependant ceci n'est pas vrai en toute généralité. En effet ℓ_1 a un type 2, mais son dual ℓ_∞ ne possède aucun cotype fini. On pourra consulter G. Pisier [79] (relatif à la K-convexité) pour une étude plus précise. La proposition 2.2.7 nous donne aussi un moyen d'accéder facilement au type linéaire et au cotype linéaire des espaces L_p, dans la mesure ou la géométrie des espaces L_p est bien connue. On montre ainsi, pour $p \in [1, \infty]$, que les espaces L_p (et ℓ_p) ont type $\min\{p, 2\}$ et cotype $\max\{p, 2\}$.

L'ensemble des valeurs de p pour lesquelles un espace de Banach X contient uniformément les ℓ_p^n est étroitement lié au type linéaire et au cotype linéaire de X.

Soient

$$p_X = \sup\{p \geqslant 1 \;:\; T_p(X) < \infty\}$$

et

$$q_X = \inf\{q \leqslant \infty \;:\; C_q(X) < \infty\}.$$

On compile dans le théorème suivant des résultats dûs à B. Maurey, G. Pisier [69] et J. L. Krivine [51]

Théorème 2.2.8 (Maurey-Pisier-Krivine). *Soit X un espace de Banach de dimension infinie.*

i) *X contient uniformément les ℓ_r^n pour $r = p_X$ et $r = q_X$.*

ii) $p_X = \inf\{p \geqslant 1 \;:\; X$ *contient uniformément les* $\ell_p^n\}$

iii) $q_X = \sup\{q \geqslant 2 \;:\; X$ *contient uniformément les* $\ell_q^n\}$

On notera qu'un espace de Banach avec un type non trivial ($p_X > 1$), a toujours un cotype non trivial ($q_X < \infty$). La réciproque est fausse ; il suffit de considérer l'espace ℓ_1.

Remarque 2.9 On insistera sur les cas $p = 1$ et $p = \infty$.

- Un espace de Banach n'a pas de type non trivial, si et seulement si, il contient uniformément les ℓ_1^n.
- Un espace de Banach n'a pas de cotype non trivial, si et seulement si, il contient uniformément les ℓ_∞^n.

2.3 Plongements non linéaires entre espaces métriques

Les applications non linéaires, que nous allons définir entre des espaces métriques généraux, sont aussi couramment utilisées pour comparer les espaces de Banach.

Définition 2.3.1. *Soient* (M,d) *et* (N,δ) *deux espaces métriques et* $f : M \to N$ *une application. Pour* $t > 0$ *on définit :*

$$\rho_f(t) = \mathrm{Inf}\{\delta(f(x), f(y)); \quad d(x,y) \geqslant t\}$$

et

$$\omega_f(t) = \mathrm{Sup}\{\delta(f(x), f(y)); \quad d(x,y) \leqslant t\}.$$

1. f *est un* plongement grossier *si* $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_f(t) = \infty$ *et* $\omega_f(t) < \infty$ *pour tout* $t > 0$.

2. *Si* f *est injective,* f *est un* plongement uniforme *si* $\lim\limits_{t\to 0} \omega_f(t) = 0$ *et* $\rho_f(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$.

3. *Si* f *est injective,* f *est un* plongement Lipschitzien *s'il existe deux constantes* C_1, C_2 *positives telles que* $\omega_f(t) \leqslant C_1 t$ *et* $\omega_{f^{-1}}(t) \leqslant C_2 t$, *pour tout* $t > 0$.

4. f *est un* plongement fortement uniforme *si* f *est simultanément un plongement uniforme et grossier.*

Remarque 3.2

1. La notion de plongement uniforme de la définition 2.3.1 est la notion classique. Un plongement uniforme est une application injective uniformément continue, d'inverse uniformément continue.
2. On définit aussi la *distortion* d'une application injective $f : (M,d) \to (N,\delta)$ comme étant

   $$\mathrm{dist}(f) := \|f\|_{Lip}\|f^{-1}\|_{Lip} = \sup_{x\neq y\in M} \frac{\delta(f(x), f(y))}{d(x,y)} . \sup_{x\neq y\in M} \frac{d(x,y)}{\delta(f(x), f(y))}.$$

   f est donc un plongement Lipschitzien si sa distortion est finie. La terminologie *plongement métrique* sera aussi utilisée et on notera $M \overset{C}{\hookrightarrow} N$ si $\mathrm{dist}(f) \leqslant C$.
3. Une application f telle que $\omega_f(t) < \infty$, $\forall t > 0$ est dite *grossièrement continue.*

On a les implications triviales suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f \text{ plongement Lipschitzien} & \Longrightarrow & f \text{ plongement uniforme} \\ \Downarrow & & \\ f \text{ plongement grossier} & & \end{array}$$

Pour mieux comprendre la catégorie grossière, définissons les homéomorphismes grossiers.

Définition 2.3.3. *En gardant les notations de la définition 2.3.1, M est dit* grossièrement homéomorphe *à N, s'il existe des applications grossièrement continues (cf Remarque 2.3.2) $f : M \to N$ et $g : N \to M$ telles que*

$$\sup_{x \in M} d(x, g \circ f(x)) < \infty$$

et

$$\sup_{y \in N} \delta(y, f \circ g(y)) < \infty.$$

Maintenant munissons $\mathbb{R}$ avec les deux métriques

$$\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$$

et

$$\sigma(x, y) = |x - y| + 1, \text{ si } x \neq y \text{ et } \sigma(x, y) = 0 \text{ si } x = y.$$

$\mathbb{R}$ muni de sa métrique classique est uniformément homéomorphe à $(\mathbb{R}, \rho)$ et grossièrement homéomorphe à $(\mathbb{R}, \sigma)$. Cependant, $(\mathbb{R}, \sigma)$ et $(\mathbb{R}, \rho)$ ne sont ni uniformément homéomorphes, ni grossièrement homéomorphes. Un homéomorphisme uniforme rend compte de la structure microscopique de l'espace, alors qu'un homéomorphisme grossier encode uniquement la structure macroscopique. La lectrice pourra consulter [48] pour une discussion détaillée des applications non linéaires introduites dans cette section.

Chapitre 3

Caractérisation métrique de propriétés isomorphiques

3.1 Introduction

Cette partie s'inscrit fortement dans ce qui est communément appelé le "programme de Ribe" dans l'article de M. Mendel et A. Naor [71]. X est dit *finiment représentable dans* Y s'il existe une constante $\lambda \geqslant 1$ telle que, quelque soit F un sous-espace de dimension finie de X il existe un sous-espace G de Y tel que $d_{BM}(F,G) \leqslant \lambda$. Y contient donc une copie isomorphique de tout sous-espace de dimension finie de X. En 1976, M. Ribe [83] a prouvé que si deux espaces de Banach X et Y sont uniformément homéomorphes alors X est finiment représentable dans Y et vice-versa. Il est donc naturel d'espérer que toute propriété locale des espaces de Banach, i.e les propriétés stables par représentation finie, admette une caractérisation purement métrique. En 1986, J. Bourgain [18] exhiba pour la première fois une manifestation concrète du "programme de Ribe", en caractérisant à l'aide d'un invariant métrique la super-réflexivité.

3.2 Rappels sur la super-réflexivité

Un espace de Banach X est dit *super-réflexif* si tout espace de Banach qui est finiment représenté dans X est réflexif, ou de façon équivalente, si tout ultra-produit de X est réflexif. La super-réflexivité est clairement une propriété locale. La super-réflexivité est une notion stable par homéomorphisme uniforme d'après le résultat de M. Ribe mentionné en introduction.

P. Enflo [34] a fourni une caractérisation de la super-réflexivité en terme de renormage.

Théorème 3.2.1 (Enflo)**.** *Soit X un espace de Banach, alors*

X est super-réflexif, si et seulement si, X admet une norme équivalente uniformément convexe ou (respectivement et) uniformément lisse.

Remarque 2.2 D'après G. Pisier [78], un espace super-réflexif possède un type non trivial et donc un cotype non trivial.

L'invariant métrique mis en avant par J. Bourgain est l'*arbre dyadique*, ou arbre binaire, muni de la distance hyperbolique. Soit $\Omega_0 = \{\varnothing\}$, la racine de l'arbre. Soient $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$, $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i$ et $B_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Alors B_n est l'arbre dyadique fini de hauteur n et B_∞ l'arbre dyadique infini.
Pour s, $t \in B_\infty$, on note $s \leqslant t$ si t est un prolongement de s.
La longueur de s notée $|s|$ est le nombre de noeuds composant s. La *distance hyperbolique* entre s et t est $\rho(s,t) = |s| + |t| - 2|\delta|$, où δ est le plus grand ancêtre commun de s et t. La distance sur B_n, est la restriction à B_n de ρ.

Théorème 3.2.3 (Bourgain)**.** *Soit X un espace Banach, alors*

X n'est pas super-réflexif $\Longleftrightarrow \exists C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(B_n, \rho) \overset{C}{\hookrightarrow} X$

3.3 Manifestations du "programme de Ribe"

La recherche de manifestations concrètes du "programme de Ribe", relativement à des propriétés locales des espaces de Banach (super-réflexivité, type ou cotype linéaires...) est à la base de très nombreux résultats en théorie des espaces métriques. Une des thématiques les plus étudiées depuis la fin des années 80, est la recherche d'une extension au cadre métrique, des notions de type et de cotype linéaires. Il serait parallèlement très apprécié que les éventuels analogues métriques puissent fournir des variantes métriques aux puissants théorèmes de la théorie linéaire faisant intervenir le type linéaire ou le cotype linéaire.

3.3.1 Notions de type non linéaire

La première tentative consistant à trouver une notion valable de type non linéaire est l'oeuvre de P. Enflo [33], en 1969. Introduisons quelques notations qui s'avérerons pratiques par la suite.

On définit les applications $\sigma_j : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}^n$ par $\sigma_j(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, -\epsilon_j, \dots, \epsilon_n)$. On note $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$. On remarquera que $\sigma(\epsilon) = -\epsilon$.

Un espace métrique (M, d) est de *type de Enflo p* s'il existe une constante $T < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute application $f : \{-1,1\}^n \to M$,

$$\mathbb{E}_\epsilon d(f(\epsilon), f \circ \sigma(\epsilon))^p \leqslant T^p \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_\epsilon d\left(f(\epsilon), f(\sigma_j(\epsilon)\right)^p$$

Il est facile de montrer que le type de Enflo p implique le type linéaire p en considérant les fonctions

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j.$$

Cependant, bien que les espaces L_p ont un type de Enflo p, cette notion non linéaire de type n'est pas suffisante pour coïncider avec le type linéaire. En effet on peut seulement (ou au moins) montrer que X a le type linéaire $p > 1$, implique que X a un type de Enflo q pour tout $1 < q < p$ (Pisier [80]). Ce problème a été résolu récemment lorsque M. Mendel et A. Naor [70] ont construit une variante du type de Enflo qui coïncide avec le type linéaire.

En 1986, une variante du type de Enflo introduite par J. Bourgain, V. Milman et H. Wolfson [19], permet de démontrer des analogues non linéaires d'importants résultats de la théorie locale des espaces de Banach. Une utilisation d'un de ces résultats interviendra dans la preuve du corollaire 3.5.4.

Un espace métrique (M, d) a le *type BMW p*, s'il existe une constante $K < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute application $f : \{-1,1\}^n \to M$,

$$\mathbb{E}_\epsilon d(f(\epsilon), f(\sigma(\epsilon))^2 \leqslant K^2 n^{\frac{2}{p}-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_\epsilon d\left(f(\epsilon), f(\sigma_j(\epsilon)\right)^2$$

Le *cube de Hamming* H_n de taille n, est l'ensemble $\{-1,1\}^n$ muni de la distance

$$d(\epsilon, \epsilon') = \sum_{j=1}^{n} |\epsilon_j - \epsilon'_j|.$$

Plus généralement, pour $1 \leqslant p < \infty$, on appelle ℓ_p *n-cube* noté H_n^p, l'ensemble $\{-1,1\}^n$ muni de la distance

$$d_p(\epsilon, \epsilon') = \left(\sum_{j=1}^{n} |\epsilon_j - \epsilon'_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les cubes de Hamming sont donc les ℓ_1 n-cubes. On définit la *distance de Lipschitz* entre deux espaces métriques en prenant le logarithme de

$$d_{Lip}(M,N) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{dist}(f);\ \text{f bijection bi-Lipschitzienne entre M et N}\}.$$

On dit qu'un espace métrique (M,d) *contient les ℓ_p n-cubes uniformément* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une suite de sous-ensembles de M,
$\{M_n \subset M;\ |M_n| = 2^n\}$ telle que pour tout n, $d_{Lip}(M_n, H_n^p) \leqslant 1+\epsilon$.

Le type BMW permet de prouver

Théorème 3.3.1 (Bourgain-Milman-Wolfson)**.** *Soient (M,d) un espace métrique et X un espace de Banach,*

i) M n'a pas de type BMW $p>1 \iff M$ contient les cubes de Hamming uniformément.

ii) X contient les ℓ_p n-cubes uniformément pour $1 \leqslant p < 2 \iff X$ contient les ℓ_p^n uniformément.

La première assertion n'est autre que l'analogue non linéaire du théorème de Maurey-Pisier en théorie locale des espaces de Banach (cf Théorème 2.2.8 et Remarque 2.2.9).

3.3.2 Notions de cotype non linéaire

Trouver un analogue non linéaire du cotype linéaire est une tâche beaucoup plus ardue pour diverses raisons que nous ne détaillerons pas ici. Néanmoins, M. Mendel et A. Naor [71] ont réussi ce tour de force récemment.
Soit (M,d) un espace métrique et $q>0$. On dira que (M,d) a le *cotype métrique q* avec constante Γ si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier pair m, tel que pour toute application $f : \mathbb{Z}_m^n \to M$,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^q \right] \leqslant \Gamma^q m^q \mathbb{E}_{\epsilon,x}[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^q],$$

où les espérances conditionnelles sont relatives à un choix uniforme des $x \in \mathbb{Z}_m^n$ et $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$, et où $\{e_j\}_{j=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il s'avère que le cotype métrique et le cotype linéaire coïncident sur la classe des espaces de Banach. Afin de trouver un analogue non linéaire au théorème de Maurey-Pisier pour le cotype, on a besoin de définir une variante “à la Bourgain, Milman et Wolfson” du cotype métrique.

Soit (M, d) un espace métrique et $0 < p \leqslant q$. On note $\Gamma_q^{(p)}(M)$ la plus petite constante Γ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier pair m, et pour toute application $f : \mathbb{Z}_m^n \to M$,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right] \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \mathbb{E}_{\epsilon,x}[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p],$$

où les espérances conditionnelles sont relatives à un choix uniforme des $x \in \mathbb{Z}_m^n$ et $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$, et où $\{e_j\}_{j=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $1 \leqslant p < q$ on dira que (M, d) a le *cotype métrique faible q avec exposant p* et constante Γ.

Si $[m]_p^n$ est l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m\}^n$, muni de la distance induite par ℓ_p^n ($m,n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$), on a

Théorème 3.3.2 (Mendel-Naor). *Soit (M, d) un espace métrique tel que $\Gamma_q^{(2)}(M) = \infty$ pour tout $q < \infty$. Alors pour tout $m,n \in \mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$,*

$$[m]_\infty^n \overset{1+\epsilon}{\hookrightarrow} M.$$

3.4 Caractérisation métrique de la super-réflexivité

Revenons à l'arbre dyadique infini B_∞. Dans quels espaces peut-on plonger cet arbre ? Il est clair que B_∞, muni d'une distance quelconque, se plonge isométriquement dans $\ell_\infty(\mathbb{N})$, car tout espace métrique séparable (M, d) se plonge isométriquement dans $\ell_\infty(\mathbb{N})$ par le plongement de Fréchet

$$\begin{aligned} f : M &\to \ell_\infty(\mathbb{N}) \\ t &\mapsto (d(s,t))_{s \in D}, \end{aligned}$$

où D est dénombrable et dense dans M.
Les arbres dyadiques hyperboliques sont des espaces métriques qui ont une structure proche de celle de ℓ_1. On peut montrer facilement que (B_∞, ρ) se plonge isométriquement dans $\ell_1(\mathbb{N})$. En effet, soit $(e_s)_{s \in B_\infty}$ la base canonique de $\ell_1(B_\infty)$ (B_∞ est dénombrable), alors le plongement est donné par

$$\begin{array}{rl} B_\infty & \to \ell_1(B_\infty) \\ t & \mapsto \sum_{\varnothing \leqslant s \leqslant t} e_s \end{array}$$

De plus, on remarquera aussi que l'arbre dyadique infini, muni de la distance $\mu(s,t) = \mathrm{Max}\,\{|s| - |\delta|, |t| - |\delta|\}$, où δ est le plus grand ancêtre commun de s et t, se plonge isométriquement dans $c_0(\mathbb{N}) \equiv c_0(B_\infty)$, à l'aide du plongement suivant

$$\begin{array}{rl} B_\infty & \to c_0(B_\infty) \\ t & \mapsto \sum_{\varnothing \leqslant s \leqslant t} (|t| - |s| + 1) e_s \end{array}$$

On en déduit que (B_∞, ρ) se plonge avec distortion 2 dans c_0, car μ est clairement une distance 2-équivalente à ρ. Ce fait peut être déduit d'un résultat récent de N. J. Kalton et G. Lancien [49], mentionné dans l'annexe A, relatif à la distortion optimale intervenant dans le théorème d'Aharoni.

J. Bourgain a prouvé que X n'est pas super-réflexif, si et seulement si, X contient uniformément métriquement (i.e avec un constante de distortion indépendante de n) tous les arbres dyadiques hyperboliques de hauteur finie n. Il est évident que si X contient métriquement l'arbre dyadique hyperbolique infini alors il contient uniformément métriquement tous ceux de hauteur finie ce qui impose à X de ne pas être super-réflexif. Dans cette section nous allons montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que (B_∞, ρ) se plonge métriquement dans n'importe quel espace de Banach non super-réflexif.

La preuve de la partie directe du théorème de Bourgain est basée essentiellement sur une caractérisation de R. C. James [42] de la super-réflexivité ainsi qu'une énumération ad'hoc des arbres finis B_n. Nous rappelons le théorème de James :

Théorème 3.4.1 (James). *Soient $0 < \theta < 1$ et X un espace de Banach non super-réflexif, alors :*
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in B_X$, $\exists\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in B_{X^*}$ tels que :

$$\begin{array}{ll} x_k^*(x_j) = \theta & \forall k < j \\ x_k^*(x_j) = 0 & \forall k \geqslant j \end{array}$$

Le caractérisation de James de la super-réflexivité donne accès uniquement à des suites finies, contrairement à une caractérisation similaire de la réflexivité qui fournit des suites infinies. La question est de trouver un moyen de construire un plongement de B_∞ en utilisant les plongements “à la Bourgain” des arbres finis. Dans [84], M. Ribe montre en particulier que, $(\sum_n l_{p_n})_2$ et $(\sum_n l_{p_n})_2 \bigoplus l_1$ sont uniformément homéomorphes, où $(p_n)_n$ est une suite telle que $p_n > 1$, et $(p_n)_n$ tend vers 1. Or il est intéressant de remarquer que

B_∞ se plonge isométriquement dans ℓ_1, et donc via l'uniforme homéomorphisme il se plonge métriquement dans $(\sum_n l_{p_n})_2$. En effet, il est bien connu qu'une application uniformément continue entre deux espaces de Banach est Lipschitz aux grandes distances (voir [30]). Cependant B_∞ ne se plonge dans aucun espace super-réflexif ℓ_{p_n}.

En s'inspirant en partie de la preuve de Ribe, on montre dans le théorème 3.4.2 que l'on peut construire un sous-espace qui admet une décomposition de Schauder $\bigoplus F_n$, telle que les $B_{2^{n+1}}$ se plongent dans F_n. On construit ensuite le plongement désiré à l'aide d'une combinaison convexe des plongements des arbres finis. Cette façon de recoller les plongements permet de contrôler la distortion, qui ainsi n'explose pas.

Théorème 3.4.2. *Soit X un espace de Banach non super-réflexif, alors (B_∞, ρ) se plonge métriquement dans X. De plus, la distortion du plongement ne dépend pas de l'espace X.*

Démonstration. Soit $(\epsilon_i)_{i\geqslant 0}$, une suite de nombres strictement positifs telle que
$\prod_{i\geqslant 0}(1+\epsilon_i) \leqslant 2$, et soit $0<\theta<1$ fixé. On pose $k_n = 2^{2^{n+1}+1}-1$.
Tout d'abord on construit simultanément par récurrence, une suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de sous-espaces de X, qui forment une décomposition finie dimensionelle (FDD) d'un sous-espace de X telle que la projection de $\bigoplus_{i=0}^q F_i$ sur $\bigoplus_{i=0}^p F_i$, parallèlement à $\bigoplus_{i=p+1}^q F_i$ (avec $p<q$) soit de norme au plus $\prod_{i=p}^{q-1}(1+\epsilon_i)$, et des suites finies

$$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k_n} \in B_{F_n}$$
$$x^*_{n,1}, x^*_{n,2}, \dots, x^*_{n,k_n} \in B_{X^*}$$

telles que :

$$\begin{aligned} x^*_{n,k}(x_{n,j}) &= \theta \quad \forall k<j \\ x^*_{n,k}(x_{n,j}) &= 0 \quad \forall k\geqslant j. \end{aligned}$$

On note $\Phi_n : B_n \to \{1,2,\dots,2^{n+1}-1\}$ l'énumération de B_n qui respecte l'ordre lexicographique. Cette énumération des B_n est telle que toute paire de segments dans B_n commençant à des noeuds incomparables (par rapport à l'ordre $\leqslant$ défini sur l'arbre) prend des valeurs dans des intervalles disjoints. Soient $\Psi_n = \Phi_{2^{n+1}}$ et $\Gamma_n = B_{2^{n+1}}$.

X est non super-réflexif, donc d'après le théorème de James :
$\exists\ x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,7} \in B_X$, $\exists\ x^*_{0,1}, x^*_{0,2}, \dots, x^*_{0,7} \in B_{X^*}$ tels que :

$$\begin{aligned} x^*_{0,k}(x_{0,j}) &= \theta \quad \forall k<j \\ x^*_{0,k}(x_{0,j}) &= 0 \quad \forall k\geqslant j. \end{aligned}$$

$\Gamma_0 = B_2$ se plonge dans X via le plongement $f_0(\epsilon) = \sum_{s \leqslant \epsilon} x_{0,\Psi_0(s)}$ (voir [18]).
Soit $F_0 = \text{Vect}\{x_{0,1}, \ldots, x_{0,7}\}$, alors $\dim(F_0) < \infty$.
Supposons que F_p et

$$x_{p,1}, x_{p,2}, \ldots, x_{p,k_p} \in B_{F_p}$$
$$x^*_{p,1}, x^*_{p,2}, \ldots, x^*_{p,k_p} \in B_{X^*}$$

sont construits pour tout $p \leqslant n$ de manière à satisfaire les conditions requises.
On applique le lemme de Mazur (voir [61] page 4) au sous-espace de dimension finie $\bigoplus_{i=0}^n F_i$ de X. Ainsi il existe $Y_n \subset X$ tel que $\dim(X/Y_n) < \infty$ et :

$$\|x\| \leqslant (1+\epsilon_n)\|x+y\|, \forall (x,y) \in \bigoplus_{i=0}^{n} F_i \times Y_n.$$

Cependant Y_n est de codimension finie dans X, donc il n'est pas super-réflexif.
D'après le théorème de James et le théorème de Hahn-Banach :

$$\exists\ x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}} \in B_{Y_n},$$
$$\exists\ x^*_{n+1,1}, x^*_{n+1,2}, \ldots, x^*_{n+1,k_{n+1}} \in B_{X^*},$$

tels que :

$$x^*_{n+1,k}(x_{n+1,j}) = \theta \quad \forall k < j$$
$$x^*_{n+1,k}(x_{n+1,j}) = 0 \quad \forall k \geqslant j.$$

Γ_{n+1} se plonge dans Y_n via le plongement $f_{n+1}(\epsilon) = \sum_{s \leqslant \epsilon} x_{n+1,\Psi_{n+1}(s)}$.
Soit $F_{n+1} = \text{Vect}\{x_{n+1,j}\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant k_{n+1}\}$, alors $\dim(F_{n+1}) < \infty$, ce qui achève la récurrence.

Définissons maintenant les projections suivantes :
Soit, P_n la projection de $\overline{\text{Vect}}(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i)$ sur $F_0 \bigoplus \ldots \bigoplus F_n$ parallèlement à $\overline{\text{Vect}}(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} F_i)$.
Il est immédiat que $\|P_n\| \leqslant \prod_{i=n}^{\infty}(1+\epsilon_i) \leqslant 2$.
Dorénavant on notera $\Pi_0 = P_0$ et $\Pi_n = P_n - P_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. On a $\|\Pi_n\| \leqslant 4$.

D'après la construction de Bourgain, on a pour tout n :

$$\frac{\theta}{3}\rho(\epsilon,\epsilon') \leqslant \|f_n(\epsilon) - f_n(\epsilon')\| \leqslant \rho(\epsilon,\epsilon'), \tag{3.1}$$

où f_n représente les plongements “à la Bourgain” de Γ_n dans F_n,
i.e $f_n(\epsilon) = \sum_{s \leqslant \epsilon} x_{n,\Psi_n(s)}$.

On remarquera que :

$$\forall\ n, \forall\ \epsilon \in \Gamma_n\ \|f_n(\epsilon)\| \leqslant |\epsilon|.$$

Finalement définissons notre plongement global.
Soit

$$\begin{array}{rcl} f: \ B_\infty & \rightarrow & Y = \overline{\mathrm{Vect}}(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i) \subset X \\ \\ \epsilon & \mapsto & \lambda_\epsilon f_n(\epsilon) + (1-\lambda_\epsilon) f_{n+1}(\epsilon) \ , \ \text{si } 2^n \leqslant |\epsilon| \leqslant 2^{n+1} \end{array}$$

où,

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{n+1} - |\epsilon|}{2^n}$$

Nous allons prouver que :

$$\forall \epsilon, \epsilon' \in B_\infty, \ \frac{\theta}{24}\rho(\epsilon,\epsilon') \leqslant \|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| \leqslant 9\rho(\epsilon,\epsilon'). \tag{3.2}$$

Remarque 4.3 Il est immédiat que $\frac{\theta}{24}|\epsilon| \leqslant \|f(\epsilon)\| \leqslant |\epsilon|$.

Commençons par montrer que f est $9-$Lipschitzien.
En accord avec la remarque 3.4.3, on peut supposer que $0 < |\epsilon| \leqslant |\epsilon'|$.
Si $|\epsilon| \leqslant \frac{1}{2}|\epsilon'|$ alors :

$$\rho(\epsilon,\epsilon') \geqslant |\epsilon'| - |\epsilon| \geqslant \frac{|\epsilon| + |\epsilon'|}{3}$$

Et donc,

$$\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| \leqslant 3\rho(\epsilon,\epsilon').$$

Si $\frac{1}{2}|\epsilon'| < |\epsilon| \leqslant |\epsilon'|$, nous devons considérer les deux cas suivants.

1) si $2^n \leqslant |\epsilon| \leqslant |\epsilon'| < 2^{n+1}$.
Notons

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{n+1} - |\epsilon|}{2^n} \quad \text{et} \quad \lambda_{\epsilon'} = \frac{2^{n+1} - |\epsilon'|}{2^n},$$

on a

$$\begin{array}{rcl} \|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| & = & \|\lambda_\epsilon f_n(\epsilon) - \lambda_{\epsilon'} f_n(\epsilon') + (1-\lambda_\epsilon) f_{n+1}(\epsilon) \\ & & -(1-\lambda_{\epsilon'}) f_{n+1}(\epsilon')\| \\ \\ & \leqslant & \lambda_\epsilon \|f_n(\epsilon) - f_n(\epsilon')\| + \\ & & |\lambda_\epsilon - \lambda_{\epsilon'}|(\|f_n(\epsilon')\| + \|f_{n+1}(\epsilon')\|) + \\ & & (1-\lambda_\epsilon)\|f_{n+1}(\epsilon) - f_{n+1}(\epsilon')\| \\ \\ & \leqslant & \rho(\epsilon,\epsilon') + 2\rho(\epsilon,\epsilon') + 2\rho(\epsilon,\epsilon') \\ \\ & \leqslant & 5\rho(\epsilon,\epsilon'), \end{array}$$

puisque $\|f_n(\epsilon')\| < 2^{n+1}$, $\|f_{n+1}(\epsilon')\| < 2^{n+1}$ et,

$$|\lambda_\epsilon - \lambda_{\epsilon'}| = \frac{|\epsilon'| - |\epsilon|}{2^n} \leqslant \frac{\rho(\epsilon, \epsilon')}{2^n}.$$

2) si $2^n \leqslant |\epsilon| \leqslant 2^{n+1} \leqslant |\epsilon'| < 2^{n+2}$.

Notons

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{n+1} - |\epsilon|}{2^n} \quad \text{et} \quad \lambda_{\epsilon'} = \frac{2^{n+2} - |\epsilon'|}{2^{n+1}},$$

on a

$$\begin{aligned}
\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| &= \|\lambda_\epsilon f_n(\epsilon) + (1 - \lambda_\epsilon) f_{n+1}(\epsilon) - \lambda_{\epsilon'} f_{n+1}(\epsilon') \\
&\quad -(1 - \lambda_{\epsilon'}) f_{n+2}(\epsilon')\| \\
&\leqslant \lambda_\epsilon(\|f_n(\epsilon)\| + \|f_{n+1}(\epsilon)\|) + \\
&\quad (1 - \lambda_{\epsilon'})(\|f_{n+1}(\epsilon')\| + \|f_{n+2}(\epsilon')\|) \\
&\quad +\|f_{n+1}(\epsilon) - f_{n+1}(\epsilon')\| \\
&\leqslant \rho(\epsilon, \epsilon') + 2\lambda_\epsilon|\epsilon| + 2(1 - \lambda_{\epsilon'})|\epsilon'| \\
&\leqslant 9\rho(\epsilon, \epsilon'),
\end{aligned}$$

en effet,

$$\lambda_\epsilon \leqslant \frac{\rho(\epsilon, \epsilon')}{2^n}, \quad \text{ainsi} \quad \lambda_\epsilon|\epsilon| \leqslant 2\rho(\epsilon, \epsilon').$$

De même,

$$1 - \lambda_{\epsilon'} = \frac{|\epsilon'| - 2^{n+1}}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\rho(\epsilon, \epsilon')}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad (1 - \lambda_{\epsilon'})|\epsilon'| \leqslant 2\rho(\epsilon, \epsilon').$$

Finalement, f est 9-Lipschitzien.

Traitons maintenant le cas de la minoration.
Pour la suite de la démonstration, lorsque $|\epsilon|$ appartiendra à $[2^n, 2^{n+1}[$, pour un entier quelconque n, on notera

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{n+1} - |\epsilon|}{2^n}.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que ϵ est plus petit que ϵ' par rapport à l'ordre lexicographique. On désigne par δ le dernier ancêtre commun à ϵ et ϵ'. Et soit $d = |\epsilon| - |\delta|$ (respectivement $d' = |\epsilon'| - |\delta|$).

1) si $2^n \leqslant |\epsilon|, |\epsilon'| \leqslant 2^{n+1}$.

Alors,

$$x^*_{n,\Psi_n(\delta)}\Pi_n(f(\epsilon)-f(\epsilon')) = \theta(\lambda_\epsilon d - \lambda_{\epsilon'} d')$$

$$x^*_{n+1,\Psi_{n+1}(\delta)}\Pi_{n+1}(f(\epsilon)-f(\epsilon')) = \theta((1-\lambda_\epsilon)d - (1-\lambda_{\epsilon'})d').$$

Et ainsi,

$$\|f(\epsilon)-f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta(d-d')}{8}.$$

De plus,

$$-x^*_{n,\Psi_n(\epsilon)}\Pi_n(f(\epsilon)-f(\epsilon')) = \theta\lambda_{\epsilon'} d'$$

$$-x^*_{n+1,\Psi_{n+1}(\epsilon)}\Pi_{n+1}(f(\epsilon)-f(\epsilon')) = \theta(1-\lambda_{\epsilon'})d'.$$

ce qui entraîne,

$$\|f(\epsilon)-f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta d'}{8}.$$

Finalement si nous distinguons les cas où $\frac{d}{2} \leqslant d'$, et $d' < \frac{d}{2}$ nous obtenons :

$$\|f(\epsilon)-f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta(d+d')}{24} = \frac{\theta}{24}\rho(\epsilon,\epsilon').$$

2) si $2^n \leqslant |\epsilon| \leqslant 2^{n+1} \leqslant 2^{q+1} \leqslant |\epsilon'| \leqslant 2^{q+2}$,
ou $2^n \leqslant |\epsilon'| \leqslant 2^{n+1} \leqslant 2^{q+1} \leqslant |\epsilon| \leqslant 2^{q+2}$.

Si $n < q$,

$$|x^*_{q+1,\Psi_{q+1}(\delta)}\Pi_{q+1}(f(\epsilon)-f(\epsilon')) + x^*_{q+2,\Psi_{q+2}(\delta)}\Pi_{q+2}(f(\epsilon)-f(\epsilon'))| = \theta Max(d,d')$$

Alors,

$$\|f(\epsilon)-f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta}{16}\rho(\epsilon,\epsilon').$$

Si $n = q$ et $|\epsilon| \leqslant |\epsilon'|$,

$$|x^*_{n+1,\Psi_{n+1}(\epsilon)}\Pi_{n+1}(f(\epsilon)-f(\epsilon')) + x^*_{n+2,\Psi_{n+2}(\delta)}\Pi_{n+2}(f(\epsilon)-f(\epsilon'))| \geqslant \theta d'.$$

Nous avons,

$$\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta}{16}\rho(\epsilon, \epsilon').$$

Si $n = q$ et $|\epsilon'| < |\epsilon|$,

$x^*_{n+1,\Psi_{n+1}(\delta)}\Pi_{n+1}(f(\epsilon) - f(\epsilon')) - x^*_{n+1,\Psi_{n+1}(\epsilon)}\Pi_{n+1}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))$
$+x^*_{n+2,\Psi_{n+2}(\delta)}\Pi_{n+2}(f(\epsilon) - f(\epsilon')) = \theta d.$

on en déduit la minoration,

$$\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\| \geqslant \frac{\theta}{24}\rho(\epsilon, \epsilon').$$

Finalement $B_\infty \overset{\frac{216}{\theta}}{\hookrightarrow} X$.

□

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 3.4.4. $\exists C \geqslant 1$ *telle que,*
X est non super-réflexif, si et seulement si, $(B_\infty, \rho) \overset{C}{\hookrightarrow} X$.

Démonstration. Le corollaire se déduit immédiatement du résultat de Bourgain [18] et du théorème 3.4.2. □

3.5 Caractérisation métrique du type linéaire

La section précédente traite uniquement des arbres dyadiques munis de la distance hyperbolique. Dans cette section nous allons étudier comment caractériser une propriété linéaire, le type linéaire, à l'aide une nouvelle fois des arbres dyadiques mais équipés cette fois d'une distance adéquate. Pour cela nous allons identifier canoniquement $\{-1, +1\}^n$ avec $K_n = \{-1, +1\}^n \times \prod_{k>n}\{0\}$. Pour $p \in [1, \infty[$, on définit une nouvelle distance sur $B_\infty = \bigcup_n K_n$ de la façon suivante :

$\forall\ \epsilon, \epsilon' \in B_\infty$,

$$d_p(\epsilon, \epsilon') = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\epsilon_i - \epsilon'_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La longueur de $\epsilon \in B_\infty$ vaut $|\epsilon| = (d_p(\epsilon, 0))^p$.
La norme $\|.\|_p$ sur ℓ_p coïncide avec d_p pour les éléments de B_∞.

Commençons par rappeler un résultat fondamental dû à Krivine (pour $1 < p < \infty$ dans [51]) et James (pour $p = 1$ et ∞ dans [42]).

Théorème 3.5.1 (James-Krivine)**.** *Soient $p \in [1, \infty]$ et X un espace de Banach qui contient uniformément les ℓ_p^n. Alors, quelque soit le sous-espace de codimension finie Y de X, et quelque soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un sous-espace F de Y tel que $d_{BM}(\ell_p^n, F) < 1 + \epsilon$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.5.2. *Soit $p \in [1, \infty[$.*
Si X contient uniformément les ℓ_p^n, alors (B_∞, d_p) se plonge métriquement dans X.

Démonstration. En utilisant le théorème 3.5.1 conjointement au fait que chaque ℓ_p^n est de dimension finie, on peut construire de façon inductive des sous-espaces $(F_n)_{n=0}^\infty$ de X de dimension finie et $(R_n)_{n=0}^\infty$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, R_n est un isomorphisme linéaire de ℓ_p^n sur F_n satisfaisant

$$\forall u \in \ell_p^n \quad \frac{1}{2}\|u\| \leqslant \|R_n u\| \leqslant \|u\|$$

et aussi tels que $(F_n)_{n=0}^\infty$ est une décomposition de Schauder finie dimensionelle du sous-espace linéaire fermé qu'elle engendre, noté Z. Plus précisément, si P_n est la projection de Z sur $F_0 \oplus ... \oplus F_n$ parallèlement à $\overline{\mathrm{Vect}}\,(\bigcup_{i=n+1}^\infty F_i)$, on peut supposer que, $\|P_n\| \leqslant 2$. A partir de maintenant on notera $\Pi_0 = P_0$ et $\Pi_n = P_n - P_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Il est immédiat que $\|\Pi_n\| \leqslant 4$.

Considérons maintenant $\varphi_n : B_n \to \ell_p^n$ defini par

$$\forall \epsilon \in B_n, \quad \varphi_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^{|\epsilon|} \epsilon_i e_i,$$

où (e_i) est la base canonique de ℓ_p^n. L'application φ_n est clairement un plongement isométrique de B_n dans ℓ_p^n.
On note :

$$\forall \epsilon \in B_n, \quad f_n(\epsilon) = R_n(\varphi_n(\epsilon)) \in F_n.$$

Finalement on construit une application $f : B_\infty \to X$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & B_\infty & \to & X \\ & \epsilon & \mapsto & \lambda_\epsilon f_m(\epsilon) + (1 - \lambda_\epsilon) f_{m+1}(\epsilon) \ , \text{ si } 2^m \leqslant |\epsilon| < 2^{m+1}, \end{array}$$

où,

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{m+1} - |\epsilon|}{2^m}.$$

Remarque 5.3 On a $\frac{1}{16}|\epsilon|^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f(\epsilon)\| \leqslant |\epsilon|^{\frac{1}{p}}$.

Comme dans la preuve du théorème 3.4.2, on prouve que f est 9-Lipschitzienne en ayant recours aux mêmes calculs.

Nous devons maintenant démontrer que f^{-1} est Lipschitzienne. On considère $\epsilon, \epsilon' \in B_\infty$ et à nouveau on suppose que $0 < |\epsilon| \leqslant |\epsilon'|$. Nous devons étudier deux situations différentes. Une nouvelle fois, lorsque $|\epsilon|$ appartiendra à $[2^m, 2^{m+1}[$, pour un entier quelconque m, on notera

$$\lambda_\epsilon = \frac{2^{m+1} - |\epsilon|}{2^m}.$$

1) si $2^m \leqslant |\epsilon|, |\epsilon'| < 2^{m+1}$.

$$\begin{aligned}
d_p(\epsilon, \epsilon') &\leqslant \|\lambda_\epsilon \textstyle\sum_{i=1}^{|\epsilon|} \epsilon_i e_i - \lambda_{\epsilon'} \sum_{i=1}^{|\epsilon'|} \epsilon'_i e_i\|_p \\
&\quad + \|(1-\lambda_\epsilon) \textstyle\sum_{i=1}^{|\epsilon|} \epsilon_i e_i - (1-\lambda_{\epsilon'}) \sum_{i=1}^{|\epsilon'|} \epsilon'_i e_i\|_p \\
&\leqslant 2\|\Pi_m(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| + 2\|\Pi_{m+1}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| \\
&\leqslant 16\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\|.
\end{aligned}$$

2) si $2^m \leqslant |\epsilon| \leqslant 2^{m+1} \leqslant 2^{q+1} \leqslant |\epsilon'| < 2^{q+2}$.

si $m < q$,

$$\begin{aligned}
d_p(\epsilon, \epsilon') &\leqslant 2d_p(\epsilon', 0) \\
&\leqslant 2((1-\lambda_{\epsilon'})d_p(\epsilon', 0) + \lambda_{\epsilon'} d_p(\epsilon', 0)) \\
&\leqslant 2(2\|\Pi_{q+2}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| + 2\|\Pi_{m+1}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\|) \\
&\leqslant 32\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\|.
\end{aligned}$$

si $m = q$,

$$\begin{aligned}
d_p(\epsilon, \epsilon') &\leqslant \lambda_\epsilon d_p(\epsilon, 0) + \|(1-\lambda_\epsilon) \textstyle\sum_{i=1}^{|\epsilon|} \epsilon_i e_i - \lambda_{\epsilon'} \sum_{i=1}^{|\epsilon'|} \epsilon'_i e_i\|_p \\
&\quad + (1-\lambda_{\epsilon'}) d_p(\epsilon', 0) \\
&\leqslant 2\|\Pi_m(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| + 2\|\Pi_{m+1}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| \\
&\quad + 2\|\Pi_{m+2}(f(\epsilon) - f(\epsilon'))\| \\
&\leqslant 24\|f(\epsilon) - f(\epsilon')\|.
\end{aligned}$$

On en conclut que f^{-1} est 32-Lipschitz, et $B_\infty \overset{288}{\hookrightarrow} X$.

$\square$

Déduisons maintenant du théorème 3.5.2 deux corollaires. On rappelle que $p_X = \sup\{p \geqslant 1 \ : \ T_p(X) < \infty\}$.

Corollaire 3.5.4. *Soient X un espace de Banach et $1 \leqslant p < 2$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $p_X \leqslant p$.

ii) *X contient uniformément les ℓ_p^n.*

iii) *X contient uniformément (métriquement) les (B_n, d_p).*

iv) *(B_∞, d_p) se plonge métriquement dans X, la distortion du plongement ne dépendant pas de X.*

Démonstration. *ii*) implique *i*) est trivial.

i) implique *ii*) est une conséquence du théorème 3.5.1 et des travaux de Bretagnolle, Dacunha-Castelle et Krivine [20].

En ce qui concerne l'équivalence entre *ii*) et *iii*) on se reportera au théorème 2.3.1.

iv) implique *iii*) est trivial.

Et *ii*) implique *iv*) est donné par le théorème 3.5.2.

$\square$

Corollaire 3.5.5. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie, alors (B_∞, d_2) se plonge métriquement dans X.*

Démonstration. Ce corollaire est une conséquence du théorème de Dvoretsky [32] et du théorème 3.5.2.

$\square$

Chapitre 4

Espaces universels pour les espaces localement finis

4.1 Introduction

La notion d'espace universel remonte aux origines de la théorie linéaire des espaces de Banach, fondée par Stefan Banach [7]. Il est prouvé dans [7] le résultat fondamental suivant

Théorème 4.1.1 (Banach-Mazur). *Tout espace de Banach séparable se plonge linéairement isométriquement dans $C([0,1])$.*

On dit que $C([0,1])$ est *linéairement isométriquement universel* pour les espaces de Banach séparables. Le résultat est particulièrement intéressant car il montre que tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace d'un espace de Banach possédant une base.

Le fait que $C([0,1])$ soit aussi séparable a été fructueusement utilisé par B. Bossard [15], lors de son étude de la complexité descriptive des classes d'isomorphisme d'espaces de Banach séparables. Le point clef est l'utilisation de la structure Borélienne d'Effros sur les fermés (les espaces de Banach séparables en font partie) d'un espace universel ($C([0,1])$).

Dans le cadre métrique les motivations sont quelque peu différentes. Pour une classe d'espaces métriques, on cherche des espaces métriques universels (principalement pour les plongements métriques) ayant de bonnes propriétés (géométriques, combinatoires, de petite dimension...). De plus, on demande à ce que les plongements utilisés tordent les distances le moins possible. Lorsque l'on cherche à traiter efficacement un nombre de données gigantesque (plusieurs millions), on se ramène régulièrement au problème du plongement métrique, avec une distortion minimale, des espaces métriques finis de taille arbitrairement grande dans des espaces de Banach de dimension aussi petite que possible. L'intervention, peut-être la plus spectaculaire, de la géométrie des espaces de Banach, dans la résolution de problèmes d'Informatique Théorique est certainement l'utilisation par E. London, N. Linial et Y. Rabinovich [63], d'un célèbre théorème de Bourgain [17]. Ce résultat concernant le plongement des espaces métriques finis dans L_2 est utilisé de façon cruciale pour fournir rapidement des solutions approchées à un problème de réseau, ou au problème du Sparsest Cut. L'article de London, Linial et Rabinovich a donné une nouvelle impulsion présente notamment dans les travaux de S. Arora, R. Krauthgamer, J. R. Lee, M. Mendel, A. Naor, S. Rao, U. Vazirani et bien d'autres encore. Le lecteur intéressé pourra consulter [68], [27] pour une discussion détaillée des ces thématiques et [88], [40] pour les applications.

Citons quelques exemples classiques d'espaces universels. L'espace ℓ_∞ est *isométriquement universel* pour les espaces métriques séparables, car tout espace métrique séparable M se plonge isométriquement dans $\ell_\infty(D)$, avec D dénombrable dense dans M, au moyen du plongement de Fréchet.
P. S. Urysohn [91] a construit un espace Polonais (complet, métrique et séparable), qui porte son nom, isométriquement universel pour les espaces Polonais, possédant en plus la propriété de ω-homogénéité.
Le théorème suivant donne un exemple fondamental d'espace métrique universel relativement aux plongements métriques.

Théorème 4.1.2 (Aharoni)**.** *Tout espace métrique séparable se plonge Lipschitziennement dans c_0.*

Ce résultat fondamental dû à I. Aharoni en 1974 [1] exprime le fait que c_0 est *métriquement universel* pour les espaces métriques séparables.

A la vue du théorème d'Aharoni il est naturel de poser les questions suivantes :

Question a : Existe-il des espaces universels, éventuellement relativement à d'autres notions de plongement, pour des classes restreintes d'espaces métriques ?

Question b : Existe-il des propriétés qui caratérisent les espaces universels ?
Les deux théorèmes suivant apportent des réponses positives à la question a. On appelle *espace métrique localement fini*, un espace métrique tel que chaque boule ne contienne qu'un nombre fini d'éléments.

Théorème 4.1.3. *[Baudier-Lancien] Soit X un espace de Banach sans cotype et soit (M, d) un espace métrique localement fini. Alors il existe un plongement Lipschitzien de M dans X.*

Théorème 4.1.4. *[Ostrovskii] Soit (M, d) un sous-ensemble localement fini d'un espace de Hilbert. Alors M se plonge Lipschitziennement dans n'importe quel espace de Banach de dimension infinie.*

Le résultat de l'auteur et G. Lancien [10] affirme que tout espace de Banach sans cotype est métriquement universel pour la classe des espaces métriques localement finis. De même, celui de M. I. Ostrovskii [75] montre que tout espace de Banach de dimension infinie est métriquement universel pour la classe des sous-ensembles localement finis d'un espace de Hilbert.

4.2 Rappels sur les espaces $\mathcal{L}_p$

L'utilisation des espaces $\mathcal{L}_p$ en ce qui concerne l'étude des espaces universels pour la classe des espaces localement finis est à priori un peu surprenante, mais s'avère efficace. Ces espaces ont été introduits par J. Lindenstrauss et A. Pełczyński [60], en 1968.

Définition 4.2.1. *Soient $\lambda \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Un espace de Banach X est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si pour tout sous-espace de dimension finie F de X il existe un sous-espace de dimension finie $G \subset X$ contenant F tel que $d_{BM}(G, \ell_p^m) \leqslant \lambda$ (où m est la dimension de G). X est un espace $\mathcal{L}_p$ si c'est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour un certain λ.*

Pour $1 \leqslant p < \infty$, les espaces ℓ_p et L_p fournissent les premiers exemples d'espaces $\mathcal{L}_p$. Pour ces espaces la constante λ peut être prise aussi proche de 1 que désiré. Les espaces c_0 et ℓ_∞ sont des espaces $\mathcal{L}_\infty$.
Les espaces $C(K)$, sont des prototypes d'espaces $\mathcal{L}_\infty$. De plus, les espaces $C(K)$ sont des espaces $\mathcal{L}_{\infty,1+\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$.
Les principales propriétés des espaces $\mathcal{L}_p$ sont regroupées dans les deux propositions suivantes, qui compilent des résultats dûs à un panel de mathématiciens : J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, H. P. Rosenthal, W. B. Johnson et E. Odell.

Théorème 4.2.2. *i) X est un espace $\mathcal{L}_{2,\lambda}$, si et seulement si, X est λ-isomorphe à un espace de Hilbert.*

ii) X est un espace $\mathcal{L}_p$, si et seulement si, X^* est un espace $\mathcal{L}_q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$.

iii) Si X est un espace $\mathcal{L}_p$ $(1 < p < \infty)$, alors il existe une mesure μ telle que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de l'espace $L_p(\mu)$.

iv) Si X est un espace $\mathcal{L}_p$ $(1 < p \neq 2 < \infty)$ séparable qui ne contient pas une copie isomorphe de ℓ_2, alors il est isomorphe à ℓ_p.

Pour les cas $p = 1$ et $p = \infty$, on a les caractérisations suivantes

Théorème 4.2.3. *Soit X un espace de Banach,*

i) X est un espace $\mathcal{L}_1$ séparable, si et seulement si, X^* est isomorphe à ℓ_∞.

ii) X est un espace $\mathcal{L}_\infty$, si et seulement si, X^{**} est isomorphe à un espace $C(K)$.

4.3 Plongement des espaces métriques localement finis

Commençons cette section en mentionnant le fait suivant

Proposition 4.3.1. *Soit N un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout espace métrique localement fini M : $M \overset{C_M}{\hookrightarrow} N$.

ii) Il existe une constante universelle $C \geqslant 1$ telle que pour tout espace métrique localement fini $M \overset{C}{\hookrightarrow} N$.

Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Soit $(M_p, d_p)_{p=1}^{\infty}$ une suite d'espaces métriques localement finis. Alors il existe un espace métrique localement fini (M, d) tel que chaque M_p se plonge isométriquement dans M.*

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, fixons $x_0^p \in M_p$.
Considérons $M = \displaystyle\bigcup_{p=1}^{\infty} \{p\} \times M_p$. Soient $x \in M_p$ et $y \in M_q$.
On définit

$$d((p,x),(q,y)) = d_p(x,y) \text{ si } p = q$$

et

$$d((p,x),(q,y)) = \max\{p, q, d_p(x_0^p, x), d(x_0^q, y)\} \text{ si } p \neq q.$$

Une simple vérification suffit à prouver que (M, d) est un espace métrique localement fini. □

Lorsque tous les espaces métriques localement finis se plongent dans un espace métrique, on peut donc toujours supposer que la distortion avec laquelle ils se plongent est universelle.

Enonçons et démontrons le résultat central de cette section

Théorème 4.3.3. *Soient* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et* $\lambda \geqslant 1$. *Soient* $(Y, \|\cdot\|)$ *un espace* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *et* M *un sous-ensemble localement fini de* Y, *alors* M *se plonge Lipschitziennement dans tout espace de Banach* X *qui contient uniformément les* ℓ_p^n. *De plus la distortion ne dépend que de* λ.

Démonstration. Soit $B_n := \{t \in M; \|t\| \leqslant 2^{n+1}\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $B(t_0, 1) = \{t_0\}$ et que $t_0 = 0$. $F_n = \overline{\mathrm{Vect} B_n}$ est un sous-espace de dimension finie de Y, donc il existe un sous-espace de dimension finie G_n contenant F_n et un isomorphisme R_n de G_n sur $\ell_p^{dim(G_n)}$ tel que $\mathrm{dist}(R_n) \leqslant \lambda$, avec $\|R_n\| \leqslant 1$ et $\|R_n^{-1}\| \leqslant \lambda$. On fixe $\delta > 0$. Comme dans la preuve du théorème 3.4.2 on construit une FDD $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ d'un sous-espace de X et des applications linéaires $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ telles que pour tout $n \geqslant 0$, T_n est un isomorphisme de $\ell_p^{dim(G_n)}$ sur Z_n satisfaisant

$$\forall u \in \ell_p^{dim(G_n)} \qquad \frac{1}{1+\delta}\|u\| \leqslant \|T_n u\| \leqslant \|u\|.$$

On garde les mêmes notations en ce qui concerne les différentes projections P_n et Π_n.

Définissons

$$\begin{array}{rcl} f_n : G_n \supset B_n & \longrightarrow & Z \subset X \\ t & \longmapsto & T_n \circ R_n(t) \end{array}$$

On peut maintenant construire $f : M \longrightarrow Z \subset X$ de la façon suivante :
(i) $f(0) = 0$.
(ii) Pour $n \geqslant 0$ et $2^n \leqslant \|t\| < 2^{n+1}$:

$$f(t) = \lambda_t f_n(t) + (1 - \lambda_t) f_{n+1}(t), \quad \text{avec} \quad \lambda_t = \frac{2^{n+1} - \|t\|}{2^n}.$$

Dans la suite de la preuve on supposera toujours que $\|a\| \leqslant \|b\|$. Nous devons considérer les trois cas suivants :

1) $2^n \leqslant \|a\| \leqslant \|b\| < 2^{n+1}$

On a

$$\|\Pi_n(f(a) - f(b))\| = \|\lambda_a f_n(a) - \lambda_b f_n(b)\| \tag{4.1}$$

et,

$$\|\Pi_{n+1}(f(a) - f(b))\| = \|(1-\lambda_a) f_{n+1}(a) - (1-\lambda_b) f_{n+1}(b)\| \tag{4.2}$$

D'après l'inégalité triangulaire (4.1) est encadré par

$$\lambda_a \|f_n(a) - f_n(b)\| \pm (\lambda_a - \lambda_b)\|f_n(b)\| \tag{4.3}$$

et (4.2) est compris entre

$$(1-\lambda_a)\|f_{n+1}(a)-f_{n+1}(b)\| \overset{+}{-} (\lambda_a-\lambda_b)\|f_{n+1}(b)\| \tag{4.4}$$

On a donc en minorant avec la demi-somme de (4.3) et (4.4) et en remarquant que les projections Π_n sont de norme 2,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\|a-b\|}{\lambda(1+\delta)}-2(\lambda_a-\lambda_b)\|b\|\right) \leqslant \|f(a)-f(b)\| \leqslant \|a-b\|+2(\lambda_a-\lambda_b)\|b\|$$

Mais $(\lambda_a-\lambda_b)\|b\| \leqslant \frac{\|b\|-\|a\|}{2^n}2^{n+1}$, et donc

si $\|b\|-\|a\| \leqslant \frac{\|a-b\|}{5(1+\delta)\lambda}$ on a,

$$\frac{\|a-b\|}{20(1+\delta)\lambda} \leqslant \|f(a)-f(b)\| \leqslant 5\|a-b\|.$$

Sinon $\|b\|-\|a\| \geqslant \frac{\|a-b\|}{5(1+\delta)\lambda}$, et on utilise la linéarité des applications f_n pour obtenir,

$$\begin{aligned}
4\|f(a)-f(b)\| &\geqslant \tfrac{\|\lambda_a a-\lambda_b b\|}{\lambda(1+\delta)}+\tfrac{\|(1-\lambda_a)a-(1-\lambda_b)b\|}{\lambda(1+\delta)}\\
&\geqslant \tfrac{1}{\lambda(1+\delta)}(\lambda_b\|b\|-\lambda_a\|a\|+(1-\lambda_b)\|b\|-(1-\lambda_a)\|a\|)\\
&\geqslant \tfrac{\|a-b\|}{5(1+\delta)^2\lambda^2}
\end{aligned}$$

2) $2^n \leqslant \|a\| < 2^{n+1} \leqslant \|b\| < 2^{n+2}$
La quantité $\|f(a)-f(b)\|$ est entre la somme et le demi-maximum des nombres

$$\|\Pi_n(f(a)-f(b))\| = \|\lambda_a f_n(a)\|, \tag{4.5}$$

$$\|\Pi_{n+1}(f(a)-f(b))\| = \|(1-\lambda_a)f_{n+1}(a)-\lambda_b f_{n+1}(b)\| \text{ et} \tag{4.6}$$

$$\|\Pi_{n+2}(f(a)-f(b))\| = \|(1-\lambda_b)f_{n+2}(b)\|. \tag{4.7}$$

Mais,

$$(4.5) \leqslant \frac{2^{n+1}-\|a\|}{2^n}\|a\| \leqslant 2(2^{n+1}-\|a\|) \leqslant 2(\|b\|-\|a\|) \leqslant 2\|b-a\|.$$

$$(4.7) \leqslant \frac{\|b\|-2^{n+1}}{2^{n+1}}\|b\| \leqslant 2\|b-a\|.$$

$$
\begin{aligned}
(4.6) &= \|f_{n+1}(a)-f_{n+1}(b)+(1-\lambda_b)f_{n+1}(b)-\lambda_a f_{n+1}(a)\| \\
&\leqslant \|a-b\|+2\|a-b\|+2\|a-b\| \\
&\leqslant 5\|a-b\|.
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(4.5) &\geqslant \tfrac{\lambda_a\|a\|}{\lambda(1+\delta)} \\
&\geqslant \tfrac{1}{\lambda(1+\delta)}\tfrac{2^{n+1}-\|a\|}{2^n}\|a\| \\
&\geqslant \tfrac{2^{n+1}-\|a\|}{\lambda(1+\delta)}
\end{aligned}
$$

Et $(4.7) \geqslant \frac{(1-\lambda_b)\|b\|}{\lambda(1+\delta)} \geqslant \frac{\|b\|-2^{n+1}}{\lambda(1+\delta)}$, ainsi

$$
2\|f(a)-f(b)\| \geqslant \mathrm{Max}\left\{\frac{2^{n+1}-\|a\|}{\lambda(1+\delta)}, \frac{\|b\|-2^{n+1}}{\lambda(1+\delta)}\right\}.
$$

Si $\mathrm{Max}\{2^{n+1}-\|a\|, \|b\|-2^{n+1}\} \geqslant \frac{\|b-a\|}{5\lambda(1+\delta)}$, alors

$$
\|f(a)-f(b)\| \geqslant \frac{\|b-a\|}{10\lambda^2(1+\delta)^2}.
$$

Sinon,

$$
\begin{aligned}
(4.6) &\geqslant \|f_{n+1}(b)-f_{n+1}(a)\|-(1-\lambda_b)\|b\|-\lambda_a\|a\| \\
&\geqslant \tfrac{\|b-a\|}{\lambda(1+\delta)}-2(\|b\|-2^{n+1})-2(2^{n+1}-\|a\|) \\
&\geqslant \tfrac{\|b-a\|}{\lambda(1+\delta)}-\tfrac{4}{5}\tfrac{\|b-a\|}{\lambda(1+\delta)} \\
&\geqslant \tfrac{\|b-a\|}{5\lambda(1+\delta)}
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\frac{\|b-a\|}{10\lambda^2(1+\delta)^2} \leqslant \|f(a)-f(b)\| \leqslant 9\|a-b\|.
$$

3) $2^n \leqslant \|a\| < 2^{n+1} < 2^p \leqslant \|b\| < 2^{p+1}$

On a $\|\Pi_n(f(a) - f(b))\| = \|\lambda_a f_n(a)\|$,
$\|\Pi_{n+1}(f(a) - f(b))\| = \|(1 - \lambda_a) f_{n+1}(a)\|$,
$\|\Pi_p(f(a) - f(b))\| = \|\lambda_b f_p(b)\|$ et
$\|\Pi_{p+1}(f(a) - f(b))\| = \|(1 - \lambda_b) f_{p+1}(b)\|$.
Donc,

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$

et en utilisant les projections Π_p et Π_{p+1},

$$\|f(a) - f(b)\| \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_b \|b\|}{\lambda(1+\delta)} + \frac{(1-\lambda_b)\|b\|}{\lambda(1+\delta)}\right) = \frac{\|b\|}{4\lambda(1+\delta)}.$$

Or remarquons que les inégalités suivantes sont vérifiées,

$$\frac{\|b\|}{2} \leqslant \|b\| - \|a\| \leqslant \|b - a\| \leqslant \|b\| + \|a\| \leqslant 2\|b\|.$$

Ainsi,

$$\frac{\|b - a\|}{8\lambda(1+\delta)} \leqslant \|f(a) - f(b)\| \leqslant 4\|a - b\|.$$

Finalement on obtient les estimations suivantes, valables dans tous les cas :

$$\frac{\|b - a\|}{20\lambda^2(1+\delta)^2} \leqslant \|f(a) - f(b)\| \leqslant 9\|a - b\|.$$

□

Remarque 3.4 On peut retrouver le théorème 4.1.3 en combinant le théorème 4.3.3 et le fait que $C([0,1])$ est un espace $\mathcal{L}_\infty$ isométriquement universel pour les espaces métriques séparables.

De même pour $p = 2$ on obtient le théorème 4.1.4 . En effet, un espace Y est un espace $\mathcal{L}_2$, si et seulement si, Y est isomorphe à un espace de Hilbert. D'autre part, d'après le théorème de Dvoretzky [32], tout espace de Banach de dimension infinie contient uniformément les ℓ_2^n.

4.4 Une remarque sur la réciproque du théorème d'Aharoni

La réciproque du théorème d'Aharoni est une question ouverte difficile. On peut considérer cette réciproque sous deux points de vue.

1. Si c_0 se plonge Lipschitziennement dans un espace de Banach X, c_0 se plonge-t-il nécessairement linéairement dans X ?

Cette question est équivalente au problème suivant :

2. Est-ce que tout espace métriquement universel pour les espaces métriques séparables doit nécessairement contenir une copie isomorphique de c_0 ?

Le premier point de vue, qui n'est autre que la question 1, est un problème difficile mais classique en classification non-linéaire des espaces de Banach. Il existe de nombreux résultats positifs concernant les espaces ayant la propriété de Radon-Nikodým (ℓ_p, L_p pour $1 < p < \infty$...). Or c_0 n'a pas la propriété de Radon-Nikodým et les méthodes employées, à savoir les techniques de différentiation des applications Lipschitziennes, ne peuvent être utilisées directement. On se référera à l'appendice B pour les définitions introduites et les résultats classiques, utilisés exclusivement dans cette section. Cependant au début des années 2000, G. Godefroy, N. J. Kalton et G. Lancien [36] ont démontré le résulat suivant

Théorème 4.4.1 (Godefroy-Kalton-Lancien). *Soit X un espace de Banach. Si c_0 est Lipschitz homéomorphe à X alors c_0 est linéairement isomorphe à X.*

Les outils utilisés sont principalement le lemme de Gorelik [37] et une technique de renormage maintenant classique, et ne permettent pas de répondre à la question relative aux plongements.

Aborder le problème de la classification Lipschitzienne de c_0 sous le second point de vue semble être une alternative viable. En effet, dans le cas $p = \infty$ du théorème 4.3.3, on peut montrer que la réciproque est vraie. La preuve de ce résultat nous a été communiquée par G. Schechtman. Nous le remerçions de nous avoir accordé l'autorisation de pouvoir présenter sa preuve dans cette thèse.

Théorème 4.4.2 (Schechtman). *Soit X un espace de Banach qui est métriquement universel pour les espaces métriques finis, alors X contient uniformément les ℓ_∞^n.*

Nous reportons la démonstration de ce résultat au chapitre suivant, où nous donnerons une preuve dans un cadre plus général. Cependant on déduit des théorèmes 4.1.3 et 4.4.2 le corollaire suivant

Corollaire 4.4.3. *Soit X un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) X n'a pas de cotype non trivial

ii) $\exists C > 0$ telle que $\forall (M, d)$ localement fini, $M \overset{C}{\hookrightarrow} X$

Chapitre 5

Plongement des espaces propres

5.1 Introduction

La conjecture de Baum-Connes [11], [12], est une généralisation au cadre équivariant du Théorème de l'Indice de Atiyah-Singer [6] (la variété ambiante n'est plus compacte, mais on récupère de la compacité grâce à l'action propre et co-compacte d'un groupe). Cette conjecture joue un rôle majeur dans le programme de géométrie non-commutative d'Alain Connes [24], et implique plusieurs conjectures, notamment la conjecture de Novikov, qui balaient un spectre allant de la topologie différentielle à l'algèbre. Elle a aussi des liens étroits avec la théorie géométrique des groupes. A l'instar du théorème de Atiyah-Singer, la conjecture de Baum-Connes suggère qu'un objet purement topologique coïncide avec un objet purement analytique. Pour un groupe donné G, l'objet topologique est la K-homologie équivariante de l'espace classifiant des actions propres de G, tandis que l'objet analytique est la K-théorie de la C^*-algèbre réduite de G. Les origines de cette conjecture remontent à la théorie de Fredholm, et au Théorème de l'Indice d'Atiyah-Singer. Le lecteur intéressé pourra consulter [92] pour une introduction à cette conjecture. Le lien entre les versions grossières des conjectures de Baum-Connes ou de Novikov, et la géométrie des espaces de Banach, a été mis en évidence par les travaux de G. Yu [93], puis dans l'article référence de G. Kasparov et G. Yu [50].

On dira qu'un espace métrique (M, d) est à *géométrie bornée* si pour tout $r > 0$ il existe un réel $s(r) < \infty$ tel que $\forall x \in M$, $|B(x, r)| < s(r)$, où $|B(x, r)|$ est le cardinal de la boule de centre x et de rayon r.

Le théorème suivant s'inscrit dans la mouvance du résultat de G. Yu pour les plongements grossiers à valeurs dans un espace de Hilbert.

Théorème 5.1.1 (Kasparov-Yu)**.** *Soit (M, d) un espace discret à géométrie bornée. Si M se plonge grossièrement dans un espace de Banach super-réflexif alors M satisfait la conjecture grossière de Novikov.*

Le fait que les espaces super-réflexifs soient, à renormage près, les espaces uniformément convexes est un élément clef de la démonstration. Les travaux de G. Kasparov et G. Yu ont inspiré de nouvelles directions de recherches et mis à jour ou relancé de nombreuses questions en théorie des espaces de Banach. De façon très générale, on peut se demander quels sont les espaces métriques qui se plongent grossièrement dans un espace de Banach super-réflexif ou réflexif. La même question est aussi intéressante si l'on remplace les plongements grossiers par les plongements uniformes.

Mais revenons au résultat de Kasparov et Yu et à la notion d'espace à géométrie bornée. Si G est un groupe engendré par un nombre fini de générateurs $F = \{g_1, \ldots, g_n\}$. On associe à ce goupe un graphe (le graphe de Cayley). L'ensemble des éléments du groupe constitue l'ensemble des noeuds du graphe. Deux noeuds a et b sont reliés entre eux par un segment si $a \cdot b^{-1}$ ou $b \cdot a^{-1}$ appartient à F ; ils sont dits adjacents. On muni le graphe de Cayley de sa distance canonique, i.e la distance entre deux points du graphe est le nombre de segments formant le chemin le plus court pour relier les deux points. Cette distance est un cas particulier des distances que l'on peut définir sur un graphe pondéré lorsque tous les segments sont de poids 1. Le groupe G peut donc être vu comme un espace métrique. On remarquera que la distance sur le graphe de Cayley est la distance sur G qui à deux éléments du groupe associe le nombre minimum de générateurs constituant le produit entre le premier élément et l'inverse du deuxième, ou inversement. Il est clair que cette distance est à géométrie bornée, et il est important de remarquer que la distance est indépendante du choix des générateurs à homéomorphisme Lipschitzien près. Ce sont, entre autre, les espaces métriques de ce type que le théorème de Kasparov-Yu veut traiter.

D'autre part, est-ce que tout espace métrique à géométrie bornée peut se plonger grossièrement dans un espace super-réflexif ? La réponse est négative pour plusieurs raisons. Premièrement, d'après la définition et les propriétés du cotype métrique de Mendel et Naor [71], tout espace métrique se plongeant grossièrement dans un espace super-réflexif doit posséder un cotype métrique non trivial. Et deuxièmement, V. Lafforgue [54] a montré l'existence d'un espace métrique à géométrie bornée qui ne se plonge dans aucun espace de Banach super-réflexif. Ce résultat est difficile ! Plus précisément, V. Lafforgue construit une famille de graphes expanseurs (à partir de sous-groupes d'indice fini d'un réseau cocompact de $SL_3(F)$, où F est un corps local non-archimédien) n'admettant aucun plongement grossier dans les espaces uniformément convexes. La démonstration utilise la notion de propriété (T) renforcée Banachique introduite par V. Lafforgue.

Dans la section suivante nous allons présenter quelques résultats positifs de plongements dans des espaces réflexifs, notamment pour les espaces stables.

5.2 Plongements dans des espaces réflexifs

Le premier résultat concernant le plongement grossier des espaces à géométrie bornée dans un espace réflexif remonte à 2005 et aux travaux de N. Brown et E. Guenter [21].

Théorème 5.2.1 (Brown-Guentner)**.** *Tout espace métrique à géométrie bornée se plonge grossièrement dans l'espace réflexif* $(\sum_n \ell_{p_n})_{\ell_2}$*, où* $1 < p_n < \infty$ *et* p_n *tend vers* $+\infty$*.*

En choisissant $X = \left(\sum_{n\geqslant 1} \ell_\infty^n\right)_{\ell_2}$, le théorème 4.1.3 est une amélioration significative de ce résultat.

Kalton [47] a obtenu un résultat similaire dans le cadre des espaces métriques stables. Un espace métrique (M, d) est dit *stable* si

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} d(x_m, y_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d(x_m, y_n)$$

lorsque les limites existent. Les espaces de Banach stables ont été introduits par J. L. Krivine et B. Maurey [52] au début des années 80, puis la notion de stabilité a été mise en avant dans des problèmes non-linéaires par Y. Raynaud [82]. Les espaces localement finis sont bien évidemment stables, ainsi que les espaces L_p $(1 < p < \infty)$. On remarquera que c_0 n'est pas stable.

En 2007, N. J. Kalton démontre dans [47]

Théorème 5.2.2 (Kalton)**.** *Tout espace métrique stable se plonge fortement uniformément dans un espace réflexif.*

On rappelle qu'un plongement fortement uniforme est un plongement simultanément grossier et uniforme.

Remarque 2.3 L'espace réflexif du théorème 5.2.2 est abstrait dans le sens où il provient d'un théorème de factorisation de W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson et A. Pełczyński [25].

Cependant pour les espaces compacts Y. Benyamini et J. Lindenstrauss ([13], page 184) ont obtenu le résultat suivant

Proposition 5.2.4 (Benyamini-Lindenstrauss)**.** *Soit (K, d) un espace métrique compact.*
Alors, K se plonge fortement uniformément dans $\left(\sum_{n\geqslant 1} \ell_\infty^n\right)_{\ell_2}$.

Dans la section suivante nous allons démontrer une conclusion plus forte pour une sous-classe des espaces métriques stables, les espaces métriques propres dont les compacts font partie.

5.3 Plongement fortement uniforme des espaces propres

Un espace métrique est *propre* si ses boules sont relativement compactes. Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont des exemples triviaux d'espaces propres. Il est aussi relativement facile de construire des espaces propres à partir d'une collection d'espaces compacts.
Cette section est consacrée à la preuve du résultat suivant dont la démonstration combine la technique de basculement des sections précédentes et le procédé de sommation utilisé dans la démonstration de la proposition 5.2.4.

Théorème 5.3.1. *Soient (M, d) un espace métrique propre et X un espace de Banach sans cotype non trivial, alors M se plonge fortement uniformément dans X.*

Démonstration. Soit X un espace de Banach qui contient uniformément les ℓ_∞^n (i.e sans cotype non trivial).

Pointons notre espace métrique propre en $t_0 \in M$, et notons pour $n \in \mathbb{Z}$, $B_n = B(t_0, 2^{n+1})$ la boule fermée de M de rayon 2^{n+1} centrée au point t_0.

Soit M_n^k un 2^{-k+n+3}-réseau maximal de B_n, avec $k \geqslant 1$.

On définit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n^k \ : \ B_n & \longrightarrow & \ell_\infty(M_n^k) := X_{n,k} \\ \\ t & \longmapsto & \big(d(t,s) - |s|\big)_{s\in M_n^k}, \ \text{où } |s| = d(s, t_0). \end{array}$$

Soit $\Phi : I = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On construit des sous-espaces de dimension finie $(F_j)_{j=0}^{\infty}$ de X et $(T_j)_{j=0}^{\infty}$ tels que pour tout $j \geqslant 0$, T_j soit un isomorphisme de $X_{\Phi^{-1}(j)}$ sur F_j qui vérifie

$$\forall u \in X_{\Phi^{-1}(j)} \qquad \frac{1}{2}\|u\| \leqslant \|T_j u\| \leqslant \|u\|$$

et tel que $(F_j)_{j=0}^{\infty}$ soit une FDD du sous-espace vectoriel fermé Z qu'elle engendre. Soit P_j la projection de Z sur $F_0 \oplus ... \oplus F_j$ de noyau $\overline{\text{Vect}}\,(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} F_i)$, on peut supposer après renormage, que $\|P_j\| \leqslant 1$. Finalement on note $\Pi_0 = P_0$ et $\Pi_j = P_j - P_{j-1}$ pour $j \geqslant 1$. On obtient que $\|\Pi_j\| \leqslant 2$.

Maintenant définissons

$$\begin{array}{rcl} f_n^k \; : \; B_n & \rightarrow & F_{\Phi(n,k)} \\ t & \mapsto & T_{\Phi(n,k)}(\varphi_n^k(t)) \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcl} f_n \; : \; B_n & \rightarrow & \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \Pi_{\Phi(n,k)}(Z) \\ t & \mapsto & \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{f_n^k(t)}{(n-k)^2+1} \end{array}$$

Clairement, f_n est C-Lipschitzienne avec $C = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1}$.

Finalement le plongement est donné par

$$\begin{array}{rcl} f \; : \; M & \rightarrow & Z = \overline{\text{Vect}}(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i) \subset X \\ t & \mapsto & \lambda_t f_n(t) + (1-\lambda_t) f_{n+1}(t) \; , \; \text{si } 2^n \leqslant |t| \leqslant 2^{n+1} \end{array}$$

où,

$$\lambda_t = \frac{2^{n+1} - |t|}{2^n}, \; n \in \mathbb{Z}$$

Dans un premier temps nous allons prouver que f est Lipschitzienne. Soient $a, b \in M$ et supposons, sans perte de généralité, que $|a| \leqslant |b|$.

I) Si $|a| \leqslant \frac{1}{2}|b|$, alors

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant C(|a| + |b|) \leqslant \frac{3C}{2}|b| \leqslant 3C(|b| - |a|) \leqslant 3Cd(a,b).$$

II) Si $\frac{1}{2}|b| < |a| \leqslant |b|$, nous devons considérer deux cas.

1) $2^n \leqslant |a| \leqslant |b| < 2^{n+1}$, pour un certain n. Alors, soient

$$\lambda_a = \frac{2^{n+1} - |a|}{2^n} \quad \text{et} \quad \lambda_b = \frac{2^{n+1} - |b|}{2^n}.$$

On a

$$|\lambda_a - \lambda_b| = \frac{|b| - |a|}{2^n} \leqslant \frac{d(a,b)}{2^n},$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\|f(a)-f(b)\| &= \|\lambda_a f_n(a)-\lambda_b f_n(b)+(1-\lambda_a)f_{n+1}(a)\\
&\quad -(1-\lambda_b)f_{n+1}(b)\|\\
&\leqslant \lambda_a\|f_n(a)-f_n(b)\|+(1-\lambda_a)\|f_{n+1}(a)-f_{n+1}(b)\|\\
&\quad +2C|\lambda_a-\lambda_b||b|\\
&\leqslant Cd(a,b)+2^{n+2}C|\lambda_a-\lambda_b|\\
&\leqslant 5C\,d(a,b).
\end{aligned}$$

2) $2^n \leqslant |a| < 2^{n+1} \leqslant |b| < 2^{n+2}$, pour un certain n. Alors, soit

$$\lambda_a = \frac{2^{n+1}-|a|}{2^n} \quad \text{et} \quad \lambda_b = \frac{2^{n+2}-|b|}{2^{n+1}}.$$

on a,

$$\lambda_a \leqslant \frac{d(a,b)}{2^n}, \quad \text{ainsi} \quad \lambda_a|a| \leqslant 2\,d(a,b).$$

De façon similaire,

$$1-\lambda_b = \frac{|b|-2^{n+1}}{2^{n+1}} \leqslant \frac{d(a,b)}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad (1-\lambda_b)|b| \leqslant 2\,d(a,b).$$

$$\begin{aligned}
\|f(a)-f(b)\| &= \|\lambda_a f_n(a)+(1-\lambda_a)f_{n+1}(a)-\lambda_b f_{n+1}(b)\\
&\quad -(1-\lambda_b)f_{n+2}(b)\|\\
&\leqslant \lambda_a(\|f_n(a)\|+\|f_{n+1}(a)\|)+(1-\lambda_b)(\|f_{n+1}(b)\|\\
&\quad +\|f_{n+2}(b)\|)+\|f_{n+1}(a)-f_{n+1}(b)\|\\
&\leqslant 2C\lambda_a|a|+2C(1-\lambda_b)|b|+2Cd(a,b)\\
&\leqslant 9C\,d(a,b).
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer que f est $9C$-Lipschitzienne.

Nous devons maintenant minorer f. On considère $a,b \in M$ et nous supposons une nouvelle fois que $|a| \leqslant |b|$. Trois cas différents doivent être étudiés. Dans notre propos, lorsque $|a|$ appartiendra à $[2^m, 2^{m+1}[$, pour un entier m, nous noterons

$$\lambda_a = \frac{2^{m+1}-|a|}{2^m}.$$

Dans la suite de la démonstration on notera $R_{(n,k)} = T^{-1}_{\Phi_{(n,k)}} \circ \Pi_{\Phi_{(n,k)}}$ par soucis de clarté d'écriture.

1) $2^n \leqslant |a| \leqslant |b| < 2^{n+1}$, pour un entier n.

Il existe $l \geqslant 1$ et $s_b \in M_n^{l+3}$ tels que $2^{-l+n+2} \leqslant d(a,b) < 2^{-l+n+3}$ et $d(s_b, b) < 2^{-l+n}$. On note $k = l+3$ pour la suite.

Ainsi, $R_{(n,k)}(f(a) - f(b)) = \frac{1}{(n-l-3)^2+1}(\lambda_a \varphi_n^k(a) - \lambda_b \varphi_n^k(b))$ et donc,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_a \varphi_n^k(a) - \lambda_b \varphi_n^k(b) & = & (\lambda_a(d(a,s) - |s|) - \lambda_b(d(b,s) - |s|))_{s \in M_n^k} \\ (\lambda_a \varphi_n^k(a) - \lambda_b \varphi_n^k(b))_{|s_b} & = & \lambda_a d(a, s_b) + (\lambda_b - \lambda_a)|s_b| - \lambda_b d(b, s_b) \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} R_{(n+1,k)}(f(a) - f(b)) & = & \frac{1}{(n-l-2)^2+1}((1-\lambda_a)\varphi_{n+1}^k(a) \\ & & -(1-\lambda_b)\varphi_{n+1}^k(b)) \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcl} (1-\lambda_a)\varphi_{n+1}^k(a) - (1-\lambda_b)\varphi_{n+1}^k(b) & = & ((1-\lambda_a)(d(a,s) - |s|) \\ & & -(1-\lambda_b)(d(b,s) - |s|))_{s \in M_{n+1}^k} \\ ((1-\lambda_a)\varphi_{n+1}^k(a) - (1-\lambda_b)\varphi_{n+1}^k(b))_{|s_b} & = & (1-\lambda_a)d(a,s_b) + (\lambda_a - \lambda_b)|s_b| \\ & & -(1-\lambda_b)d(b,s_b) \end{array}$$

On remarque que

$$n - l - 3 \leqslant n - l - 2 \leqslant n - l + 2 \leqslant \log(d(a,b)) < n - l + 3$$

donc si $0 \leqslant n - l - 3$ alors

$$(n-l-3)^2 + 1 \leqslant (n-l+2)^2 + 1 \leqslant (\log d(a,b))^2 + 1$$

sinon

$$\log(d(a,b)) - 7 \leqslant n - l - 3 \leqslant n - l - 2 < 0$$

et on a

$$(n-l-2)^2 + 1 \leqslant (n-l-3)^2 + 1 \leqslant \left(\log \frac{d(a,b)}{2^7}\right)^2 + 1.$$

Soit $\alpha(t) = (\log(t))^2 + 1$. Maintenant si nous sommons $R_{(n+1,k)}(f(a) - f(b))$ et $R_{(n,k)}(f(a) - f(b))$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} 8 \cdot \operatorname{Max}\left\{\alpha(d(a,b)), \alpha\left(\frac{d(a,b)}{2^7}\right)\right\} \|f(a) - f(b)\| & \geqslant & d(a, s_b) - d(b, s_b) \\ & \geqslant & d(a,b) - 2d(b, s_b) \\ & \geqslant & d(a,b) - 2^{-l+n+1} \\ & \geqslant & \frac{d(a,b)}{2} \end{array}$$

2) $2^n \leqslant |a| < 2^{n+1} \leqslant |b| < 2^{n+2}$, pour un entier n.

Il existe $l \geqslant 1$ et $s_a \in M^k_{n+1}$ tels que $2^{-l+n+3} \leqslant d(a,b) < 2^{-l+n+4}$ et $d(s_a,a) < 2^{-l+n}$.

Un recours similaire aux projections et aux évaluations en des points bien choisis permet d'estimer la norme de $f(a) - f(b)$.

$$\begin{array}{rcl} R_{(n,k)}(f(a)-f(b))_{|t_0} & = & \frac{1}{(n-k)^2+1}(\lambda_a d(t,s) - \lambda_a |s|)_{|s=t_0} \\ & = & \frac{\lambda_a}{(n-k)^2+1}|a| \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} R_{(n+2,k)}(f(a)-f(b))_{|t_0} & = & \frac{1}{(n-k+2)^2+1}(-(1-\lambda_b)d(b,s) \\ & & -(1-\lambda_b)|s|)_{|s=t_0} \\ & = & -\frac{(1-\lambda_b)}{(n-k+2)^2+1}|b| \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} R_{(n+1,k)}(f(a)-f(b))_{|s_a} & = & \frac{1}{(n-k+1)^2+1}((1-\lambda_a)d(a,s) - (1-\lambda_a)|s| \\ & & -\lambda_b d(b,s) + \lambda_b |s|)_{|s=s_a} \\ & = & \frac{1}{(n-k+1)^2+1}((1-\lambda_a)d(a,s_a) - \lambda_b d(b,s_a) \\ & & -(1-\lambda_a)|s_a| + \lambda_b |s_a|) \end{array}$$

Ainsi avec $\zeta = \mathrm{Max}\left\{\alpha(d(a,b)), \alpha\left(\frac{d(a,b)}{2^7}\right)\right\}$

$$\begin{array}{rcl} 12 \cdot \zeta \|f(a)-f(b)\| & \geqslant & \lambda_a|a| + (1-\lambda_b)|b| \\ & & -(1-\lambda_a)d(a,s_a) + \lambda_b d(b,s_a) \\ & & +(1-\lambda_a)|s_a| - \lambda_b|s_a| \\ & \geqslant & \lambda_b d(a,b) + \lambda_a|a| + (1-\lambda_b)|b| \\ & & +(1-\lambda_a)|a| - \lambda_b|a| \\ & & -\lambda_b d(s_a,a) - (1-\lambda_a)d(s_a,a) \\ & & -(1-\lambda_a)d(a,s_a) - \lambda_b d(s_a,a) \\ & \geqslant & d(a,b) - 2(1-\lambda_a+\lambda_b)d(a,s_a) \\ & \geqslant & d(a,b) - 4d(s_a,a) \\ & \geqslant & \frac{d(a,b)}{2} \end{array}$$

3) $2^n \leqslant |a| < 2^{n+1} < 2^p \leqslant |b| < 2^{p+1}$ pour des entiers n et p.

Il existe $l \geqslant 1$ tel que $2^{-l+p+2} \leqslant d(a,b) < 2^{-l+p+3}$

$$\begin{aligned}
R_{(p,l)}(f(a)-f(b))_{|t_0} &= \tfrac{1}{(p-l)^2+1}(-\lambda_b d(b,s)+\lambda_b|s|)_{|s=t_0}\\
&= -\tfrac{\lambda_b}{(p-l)^2+1}|b|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{(p+1,l)}(f(a)-f(b))_{|t_0} &= \tfrac{1}{(p-l+1)^2+1}(-(1-\lambda_b)d(b,s)\\
&\quad +(1-\lambda_b)|s|)_{|s=t_0}\\
&= -\tfrac{(1-\lambda_b)}{(p-l+1)^2+1}|b|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\cdot \mathrm{Max}\left\{\alpha(d(a,b)),\alpha\left(\tfrac{d(a,b)}{2^7}\right)\right\}\|f(a)-f(b)\| &\geqslant \lambda_b|b|+(1-\lambda_b)|b|\\
&\geqslant |b|\\
&\geqslant \tfrac{2}{3}(|a|+|b|)\\
&\geqslant \tfrac{2}{3}d(a,b)
\end{aligned}$$

Tous les cas possibles ont été traités et nous avons montré que f est un plongement fortement uniforme vérifiant les estimations suivantes :

$$\gamma(d(a,b)) \leqslant \|f(a)-f(b)\| \leqslant 9Cd(a,b),$$

où

$$\gamma(t)=\frac{t}{24\cdot \mathrm{Max}\left\{\alpha(t),\alpha\left(\frac{t}{2^7}\right)\right\}}$$

a le comportement suivant

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \tfrac{t}{(\log(t))^2+1} \text{ si } t>2^7\\
&\geqslant D \text{ une constante positive si } 1\leqslant t\leqslant 2^7\\
&= \tfrac{t}{\left(\log\left(\frac{t}{2^7}\right)\right)^2+1} \text{ si } t<1.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2 On peut donc plonger fortement uniformément tout espace métrique propre dans l'espace réflexif concret $X=\left(\sum_{n\geqslant 1}\ell_\infty^n\right)_{\ell_2}$. On remarquera aussi, que X est asymptotiquement uniformément convexe.

5.4 Plongement grossièrement bi-Lipschitz des espaces propres

En ce qui concerne les sous-espaces stables des espaces $\mathcal{L}_p$ on peut obtenir un plongement grossièrement bi-Lipschitz au sens de la définition suivante

Définition 5.4.1. *Soit $f\ :\ (M,d) \to (N,\delta)$,*
f est un plongement grossièrement bi-Lipschitz s'il existent deux constantes $C_d > 0$ et $C_a \geqslant 0$ telles que

$$\frac{1}{C_d} d(x,y) - C_a \leqslant \delta(f(x), f(y)) \leqslant C_d d(x,y) + C_a.$$

La constante C_d (respectivement C_a) sera appelée constante bi-Lipschitz grossière de dilatation *(respectivement* constante bi-Lipschitz grossière additive*).*

Un plongement bi-Lipschitz grossier est parfois appelé plongement Lipschitz aux très grandes distances. En effet, il est clair que si f est un plongement bi-Lipschitz grossier, comme dans la définition ci-dessus, alors il existe $D > 0$ et $C'_d > 0$ tels que pour tout couple de points écartés d'une distance D, alors f est un plongement Lipschitzien avec distortion C'_d. Le résultat suivant est un corollaire du théorème 4.3.3 .

Corollaire 5.4.2. *Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\lambda \geqslant 1$. Soient $(Y, \|\cdot\|)$ un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ et M un sous-ensemble propre de Y, alors M admet un plongement grossièrement bi-Lipschitz dans tout espace de Banach X qui contient uniformément les ℓ_p^n. De plus les constantes bi-Lipschitz grossières additive et de dilatation ne dépendent que de δ.*

Démonstration. $B_n := \{t \in M;\ \|t\| \leqslant 2^{n+1}\}$ est compacte.
Soit R_n un $\frac{\epsilon}{2}$-réseau de B_n. Le cardinal de R_n est fini. $R := \bigcup_{n\geqslant} R_n$ est un $\frac{\epsilon}{2}$-réseau localement fini de M. Définissons

$$\begin{array}{rccl} \beta\ :\ M & \to & R \\ t & \mapsto & \beta(t), \text{ tel que } \|t-\beta(t)\| < \frac{\epsilon}{2} \end{array}$$

Il est immédiat que $\|a-b\| - \epsilon \leqslant \|\beta(a) - \beta(b)\| \leqslant \|a-b\| + \epsilon$. Si on plonge R dans X à l'aide du théorème 4.3.3 et que l'on compose ce plongement avec β alors nous avons construit un plongement grossièrement bi-Lipschitz avec des constantes universelles C_d and C_a. $\square$

Revenons maintenant à la remarque de G. Schechtman dont nous avons discutée à la section 4.4. Dans la preuve du théorème 4.4.2, le plongement Lipschitzien peut-être remplacé par un plongement grossièrement bi-Lipschitz à condition que la constante grossière bi-Lipschitz additive puisse être rendue aussi petite que voulu. C'est le cas dans notre situation, et on a :

Théorème 5.4.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) X n'a pas de cotype non trivial.

ii) Il existe une constante universelle $C_d > 0$ telle que pour tout espace métrique propre (M, d) et pour tout $\epsilon > 0$, $M \overset{(C_d,\epsilon)}{\hookrightarrow} X$.

iii) Il existe deux constantes positives universelles C_d et C_a telles que pour tout espace métrique propre (M, d), $M \overset{(C_d,C_a)}{\hookrightarrow} X$.

La preuve nécessite un argument de différentiabilité et nous renvoyons la lectrice à l'annexe B concernant l'introduction des notions nécessaires.

Démonstration. i) implique ii) est le corollaire 5.4.2 et ii) implique iii) est trivial.

Prouvons iii) implique i) en utilisant l'argument de G. Schechtman.

Fixons n et k deux entiers strictement positifs, et soit $N_k = \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n \cap kB_{\ell_\infty^n}$. N_k est fini, donc il existe un plongement $\Theta_k : N_k \to X$ tel que $\Theta_k(0) = 0$ et $N_k \overset{(C_d,C_a)}{\hookrightarrow} X$. Soit $\Phi_k(x) = \frac{\Theta_k(kx)}{k}$, alors

$$\frac{1}{C_d}\|x - y\|_\infty - \frac{C_a}{k} \leqslant \|\Phi_k(x) - \Phi_k(y)\| \leqslant C_d\|x - y\|_\infty + \frac{C_a}{k}.$$

On définit Ψ_k de $B_{\ell_\infty^n}$ vers N_k tel que pour tout $x \in B_{\ell_\infty^n}$, on ait

$$\|x - \Psi_k(x)\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}.$$

Finalement définissons

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & B_{\ell_\infty^n} & \to & X_{\mathcal{U}} \\ & x & \mapsto & \overline{(\Phi_k \circ \Psi_k(x))_{k\geqslant 1}}^{\mathcal{U}}, \end{array}$$

où $X_{\mathcal{U}}$ est l'ultra-produit de X selon un ultra-filtre non trivial $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$. Φ est un plongement Lipschitzien de distortion C_d la constante de dilatation bi-Lipschitz grossière. A l'aide d'un argument délicat, mais classique, de différentiabilité préfaible dû à S. Heinrich et P. Mankiewicz [39] (cf annexe B), on peut montrer que ℓ_∞^n se plonge linéairement dans $X_{\mathcal{U}}^{**}$. On conclut en mentionnant le fait que le bidual et l'ultra-produit d'un espace de Banach Y sont finiment représentables dans Y.

□

Une nouvelle fois, on peut remarquer que tout espace propre admet un plongement grossièrement bi-Lipschitz dans un espace réflexif.
Quand est-il lorsque l'on remplace la réflexivité par la super-réflexivité ?

Il est clair que le résultat de V. Lafforgue [54] apporte une réponse négative. Cependant dans le cas des plongements grossièrement bi-Lipschitz, P. Nowak a construit, à base de graphes de Laakso, un exemple simple d'espace à géométrie bornée qui ne se plonge dans aucun espace uniformément convexe ([74] résultat non publié). Plus précisément il montre que les espaces dans lesquels le plongement est impossible sont les espaces métriques à boules rondes. Cette notion due à T. Laakso [55], généralise aux espaces métriques la notion d'uniforme convexité pour les espaces de Banach. On notera *diam* le diamètre d'une partie non vide d'un espace métrique.

Définition 5.4.4. *Un espace métrique* (M, d) *est un* espace à boules rondes *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tel que*

$$\operatorname{diam}\left(B\left(x, \frac{1+\delta_\epsilon}{2} d(x,y)\right) \bigcap B\left(y, \frac{1+\delta_\epsilon}{2} d(x,y)\right)\right) < \epsilon d(x,y)$$

pour tout $x,y \in X$.

T. Laakso a montré qu'un espace de Banach est à boules rondes, si et seulement si, il est uniformément convexe.

5.5 Une remarque sur les espaces universels pour les compacts

Nous venons de montrer dans les sections précédentes que les espaces de Banach sans cotype sont uniformément (et grossièrement) universels pour les espaces métriques propres. En particulier, tout espace propre se plonge dans un espace réflexif. Deux questions naturelles se posent :

- Les espaces sans cotype sont-ils encore universels pour les espaces propres relativement aux plongements Lipschitziens ?
- Les espaces métriques séparables admettent-ils tous un plongement uniforme ou grossier dans un espace réflexif ?

La réponse à la première question est négative si l'on considère l'espace réflexif $\left(\sum_{n\geqslant 1} \ell_\infty^n\right)_{\ell_2}$. En effet, comme nous l'a fait remarquer N. J. Kalton, nous avons la propriété suivante concernant les espaces métriquement universels pour les espaces métriques compacts :

Proposition 5.5.1 (Kalton). *Soit X un espace de Banach séparable métriquement universel pour les espaces métriques compacts alors :*

i) X n'a pas la propriété de Radon-Nikodým (RNP),

ii) X^{**} contient une copie isomorphique de c_0 et donc X^* contient une copie isomorphique complémentée de ℓ_1.

Nous renvoyons à l'annexe B, section B.4, pour la preuve de ce résultat qui nécessite divers outils que nous introduirons dans cette annexe.
Ainsi que nous l'a suggéré É. Ricard, considérons maintenant l'espace

$$X = \left(\sum_{n\geqslant 1} \ell_\infty^n\right)_{\ell_1} = \left(\sum_{n\geqslant 1} \ell_1^n\right)^*_{c_0}.$$

X est un espace qui a RNP en tant que dual séparable, et qui contient une suite équivalente à la base canonique de c_0 dans son bidual. Cette suite est donnée pour $i \geqslant 1$ fixé par $f_i = w*\text{-}\lim_{n\to\infty} e_{n,i} \in X^{**}$, où $(e_{n,i})_{i=1}^n$ est la base canonique de ℓ_∞^n. Un espace qui contient c_0 dans son bidual n'est donc pas forcément métriquement universel pour les espaces compacts.

En ce qui concerne la deuxième question, elle est équivalente à trouver un plongement uniforme ou grossier de c_0 dans un espace réflexif. Le problème concernant le plongement uniforme de c_0 dans un espace réflexif était un problème ouvert en théorie des espaces de Banach depuis plus de 30 ans. Il vient d'être résolu par N. J. Kalton [47].

Théorème 5.5.2 (Kalton). *Soit X un espace de Banach dont tous les duaux sont séparables. Alors c_0 ne se plonge pas grossièrement dans X et B_{c_0} ne se plonge pas uniformément dans X.*

Remarque 5.3 Kalton a aussi prouvé dans [46], que c_0 se plonge fortement uniformément dans un espace de Schur.

Chapitre 6

Arbres et indices ordinaux

6.1 Introduction

D'un point de vue de théorie des graphes, un arbre est un graphe connexe sans cycle. Un arbre est donc la donnée d'un ensemble de noeuds et d'un ensemble de couples de noeuds (les segments), tels que deux noeuds distincts soient reliés par un chemin, et qu'aucun noeud ne puisse être à la fois le début et la fin d'un chemin. Deux noeuds d'un arbre sont donc toujours reliés par un unique chemin. On peut considérer un arbre comme un espace métrique. Pour cela il suffit de le munir de la distance donnée par le nombre de segments qui compose l'unique chemin entre deux noeuds. De tels arbres sont appellés *arbres métriques*. Les arbres dyadiques hyperboliques de la section 3 en sont un exemple. La structure métrique des arbres a toujours été abondamment étudiée. Les arbres sont les éléments de base de la géométrie hyperbolique. Le plongement de certains espaces à courbure négative dans des produits d'arbres est utilisé dans plusieurs contextes (voir par exemple [22], [73] et [29]). En ce qui concerne les arbres métriques, une étude détaillée du plongement métrique des arbres métriques finis, dans les espaces euclidiens de dimension finie [65], et dans les espaces de Banach uniformément convexes [66], a été effectuée par J. Matoušek.

On dit qu'un espace métrique M est *finiment représentable dans un espace métrique* N s'il existe une constante $D \geqslant 1$ telle que pour tout sous-ensemble fini $F \subset M$, $c_N(F) \leqslant D$, où

$$c_N(F) = \inf\{\text{dist}(f) : \text{f plongement métrique de } F \text{ dans } N\}.$$

L'introduction, entre autre, de la Markov-p-convexité, un nouvel invariant métrique inspiré du type de Markov, permet à J. R. Lee, A. Naor et Y. Peres dans [59] de démontrer qu'un arbre métrique T admet un plongement métrique dans un espace de Hilbert, si et seulement si, (B_∞, ρ) n'est pas finiment représentable dans T. D'autre part, M. Mendel et A. Naor [72] ont étudié la géométrie des arbres métriques, notamment le lien entre la Markov-p-convexité et le plongement métrique des arbres dyadiques hyperboliques. Il y est aussi démontré que la Markov-p-convexité est équivalente à la p-uniforme convexité pour les espaces de Banach, ce qui est une nouvelle occurence du "programme de Ribe" dont nous avons discuté à la section 3.

Des arbres plus "linéaires" sont aussi utilisés en théorie des espaces de Banach, notamment pour caratériser la super-réflexivité, ou lors de l'étude de la propriété de Radon-Nikodým (voir [13]).

Au cours de cette section, nous étudions le plongement d'un type d'arbre particulier, les arbres à branchements dénombrables, et le lien qui les unit à un indice ordinal, l'indice de Szlenk.

6.2 Indices ordinaux

Nous allons définir deux types d'indices. D'une part des indices d'épluchages (indice de Szlenk [90], indice de dentabilité), et d'autre part des indices qui "mesurent" la complexité de la sous-structure ℓ_1 d'un espace de Banach (variantes de l'indice ℓ_1 de Bourgain [16]).

6.2.1 Indice de dentabilité et indice de Szlenk

Indice de dentabilité

Soit X un espace de Banach, et C un sous-ensemble fermé borné de X, on appelle *tranche* de C un sous ensemble de la forme :

$$T = \{x \in C : x^*(x) > t\}, \text{ où } x^* \in X^* \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

On appelle $\mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les tranches de C dont le diamètre pour la norme est plus petit que $\epsilon > 0$, et on note

$$D_\epsilon C = C \backslash \bigcup \{T : T \in \mathcal{T}\}.$$

On définit de façon inductive $D_\epsilon^\alpha C$ pour tout ordinal α par

$$D_\epsilon^{\alpha+1} C = D_\epsilon(D_\epsilon^\alpha C)$$

et

$$D_\epsilon^\alpha C = \bigcap_{\beta<\alpha} D_\epsilon^\beta K \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

On trouve l'origine de ce type de dérivation dans les travaux de Baire. On note $\overline{B}_X$ la boule unité fermée de X. Alors on définit $D(X,\epsilon)$ comme étant le plus petit ordinal α tel que $D_\epsilon^\alpha \overline{B}_X = \emptyset$, si un tel ordinal existe, sinon par convention on pose $D(X,\epsilon) = \infty$. L'*indice de dentabilité* de X est définit par

$$D(X) = \sup_{\epsilon>0} D(X,\epsilon).$$

Parmis les propriétés importantes de l'indice de dentabilité, on a

Proposition 6.2.1. *Soit X un espace de Banach, alors*

i) L'indice de dentabilité $D(X)$ est invariant par isomorphisme linéaire.

ii) Soit $D(X) = \infty$, soit il existe un ordinal α tel que $D(X) = \omega^\alpha$.

L'indice de dentabilité caractérise les espaces super-réflexifs,

Théorème 6.2.2 (Lancien)**.** *Soit X un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) X admet une norme équivalente uniformément convexe.

ii) $D(X) \leqslant \omega$.

iii) X admet une norme équivalente avec un module de convexité en puissance.

Les résultats de la section 3 affirment que posséder un indice de dentabilité strictement plus grand que ω pour un espace de Banach X est caractérisé par le plongement métrique de l'arbre dyadique infini hyperbolique.

La suite de la section est consacrée à l'étude du lien entre l'indice de Szlenk et la présence d'un autre type d'arbre, les arbres à branchements dénombrables. Pour d'autres propriétés de l'indice de dentabilité on pourra consulter [56].

Indice de Szlenk

Commençons par définir la dérivation de Szlenk. Soit X un espace de Banach et K un sous-ensemble compact pour la topologie préfaible de X^*. On dira que K est un w^*-compact. Pour $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles préfaiblement ouverts V de K tels que le diamètre (pour la norme de X^*) de V est plus petit que $\epsilon > 0$, et

$$s_\epsilon K = K \backslash \bigcup \{V \ : \ V \in \mathcal{V}\}.$$

On note $\overline{B}_{X^*}$ la boule unité fermée de X^*. A partir de la dérivation de Szlenk, on définit $S_z(X, \epsilon)$ comme étant le plus petit ordinal α tel que $s_\epsilon^\alpha \overline{B}_{X^*} = \emptyset$, si un tel ordinal existe, sinon on pose $S_z(X, \epsilon) = \infty$, par convention. L'*indice de Szlenk* de X est définit par

$$S_z(X) = \sup_{\epsilon > 0} S_z(X, \epsilon).$$

On remarquera que cette définition varie légèrement de la définition originale de W. Szlenk [90]. Cependant les deux définitions coïncident lorsque X est un espace de Banach séparable qui ne contient pas une copie isomorphique de $\ell_1(\mathbb{N})$ (cf [57]). Lorsque X est séparable, pour K un sous-ensemble w^*-compact de X^* et $\epsilon > 0$, on note

$$\ell_\epsilon K = \{x^* \in K : \exists (x_n^*)_{n \geqslant 1} \subset K \text{ telle que } \forall n \|x^* - x_n^*\| \geqslant \epsilon \text{ et } x_n^* \overset{w^*}{\rightarrow} x^*\}.$$

L'indice associé à cette dérivation est égal à l'indice de Szlenk de X.

L'indice de Szlenk a été introduit par W. Szlenk pour démontrer un résultat concernant la non existence d'un espace de Banach séparable, réflexif et isomorphiquement universel pour la classe des espaces de Banach séparables et réflexifs. Pour un exposé détaillé sur l'indice de Szlenk on pourra consulter [58].

Les propriétés fondamentales de l'indice de Szlenk sont regroupées dans la proposition suivante

Proposition 6.2.3. *Soit X un espace de Banach séparable,*

i) L'indice de Szlenk $S_z(X)$ est invariant par isomorphisme linéaire.

ii) L'indice de Szlenk des sous-espaces ou des quotients de X est majoré par l'indice de Szlenk de X.

iii) X est de dimension finie, si et seulement si, $S_z(X) = 1$.

iv) La w^*-compacité implique que $S_z(X, \epsilon)$ n'est jamais un ordinal limite. De plus, on a $S_z(X) \leqslant \omega$, si et seulement si, $S_z(X, \epsilon) < \omega$ pour tout $\epsilon > 0$.

v) Soit $S_z(X) = \infty$, soit il existe un ordinal α tel que $S_z(X) = \omega^\alpha$.

Remarque 2.4 L'indice de Szlenk est aussi défini comme l'indice d'oscillation de l'application identité de $(\overline{B}_{X^*}, \omega^*)$ dans $(X^*, \|\cdot\|)$.

6.2.2 Indices locaux du type de l'indice ℓ_1 de Bourgain

Définition des arbres

On appellera *arbre* un ensemble non vide, partiellement ordonné $(T, \leqslant)$ pour lequel l'ensemble $\{y \in T : \ y \leqslant x\}$ est totalement ordonné et fini pour chaque $x \in T$. Les éléments de T sont appellés *noeuds*.

Le *prédécesseur* de x est l'élément maximal z de l'ensemble $\{y \in T : y < x\}$, tel que si $y < x$, alors $y \leqslant z$. Un *successeur immédiat* de $x \in T$ est un noeud $y > x$ tel que $x \leqslant z \leqslant y$ implique que $z = x$ ou $z = y$.

Les *noeuds initiaux* de T sont les éléments minimaux de T, et les *noeuds terminaux* sont les éléments maximaux. Une *branche* d'un arbre est un sous-ensemble maximal totalement ordonné de l'arbre.

Un *sous-arbre* d'un arbre T est un sous-ensemble de T muni de l'ordre induit par T. Un sous-arbre est clairement un arbre.

On considérera aussi des arbres construits par rapport à un ensemble fixé X. Un *arbre sur un ensemble* X est un sous-ensemble de X indexé par un arbre T. C'est donc un ensemble de la forme $(x_s)_{s\in T}$, avec $x_s \in X$, et qui est partiellement ordonnée selon l'ordre sur l'arbre.

Un *isomorphisme d'arbres* entre deux arbres est une bijection qui préserve l'ordre entre les deux arbres.

Ordre d'un arbre

L'*arbre dérivé* d'un arbre T est l'ensemble

$$D(T) = \{x \in T : \exists y \in T \ x < y\}.$$

L'arbre dérivé de T est l'arbre T auquel on a enlevé les noeuds terminaux.

Pour chaque ordinal α on définit un arbre T^α de la façon suivante :

- $T^0 = T$,
- $T^{\alpha+1} = D(T^\alpha)$,
- Si α est un ordinal limite $T^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} T^\beta$.

Un arbre T est *bien fondé* s'il ne contient pas de sous-ensemble $S \subset T$ avec S totalement ordonné et infini. L'*ordre* d'un arbre T est définit par

$$o(T) = \inf\{\alpha : \ T^\alpha = \emptyset\},$$

s'il existe $\alpha < \omega_1$ avec $T^\alpha = \emptyset$, et $o(T) = \omega_1$ sinon.

Arbres faiblement nuls

Définissons une famille $(T^\omega_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ d'arbres à branchements dénombrables, inclus dans l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{N}$.

On utilise le symbole $\frown$ pour la concaténation de deux suites finies. La famille se construit de la façon suivante :

- $T^\omega_0 = \{\varnothing\}$
- $T^\omega_{\alpha+1} = \{\varnothing\} \bigcup_{n=0}^\infty n^\frown T^\omega_\alpha$, où $n^\frown T^\omega_\alpha = \{n^\frown s, \ s \in T^\omega_\alpha\}$
- $T^\omega_\alpha = \{\varnothing\} \bigcup_{n=0}^\infty n^\frown T^\omega_{\alpha_n}$, si α est un ordinal limite, $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ étant une énumération des ordinaux strictement inférieurs à α.

On définit l'arbre infini à branchements dénombrables par $T^\omega_\infty = \bigcup_n^\uparrow T^\omega_n$. C'est l'ensemble des suites finies d'entiers naturels.

On dit qu'un arbre sur un espace de Banach X est un *arbre faiblement nul sur* X s'il est de la forme $(x_s)_{s\in T^\omega_\alpha}$ et si $\forall s \in D(T^\omega_\alpha)$, $x_{s^\frown n} \xrightarrow{\omega} 0$.

Indice ℓ_1 de Bourgain

On définit l'indice ℓ_1 d'un espace de Banach X, noté $I(X)$, introduit par J. Bourgain [16] de la façon suivante :

Soit $K \geqslant 1$, un *arbre ℓ_1-K sur X* est un arbre sur X, tel que pour tout noeud x_s de l'arbre on ait, $\|x_s\| = 1$ et $(x_t)_{t\leqslant s}$ est K-équivalente à la base canonique de $\ell_1^{|s|}$, i.e

$$\frac{1}{K}\sum_{t\leqslant s}|a_t| \leqslant \left\|\sum_{t\leqslant s} a_t x_t\right\| \leqslant \sum_{t\leqslant s}|a_t|, \text{ pour tout } (a_t)_{t\leqslant s}\subset \mathbb{R}.$$

On définit

$$I(X,K) = \sup\{o(T) : T \text{ est un arbre } \ell_1 - K \text{ sur } X\}.$$

L'indice ℓ_1 de X est donné par

$$I(X) = \sup_{K\geqslant 1} I(X,K).$$

Nous avons les propriétés suivantes pour l'indice ℓ_1

Théorème 6.2.5. *Soit X un espace de Banach séparable, alors*

i) $I(X) < \omega_1$, si et seulement si, ℓ_1 ne se plonge pas linéairement dans X.

ii) Soit $I(X) = \omega_1$, soit $I(X) = \omega^\alpha$ pour un ordinal $\alpha < \omega_1$.

La première assertion est due à J. Bourgain [16], tandis que la deuxième provient de l'article [44] de R. Judd et E. Odell.

Indice ℓ_1^+-faiblement nul

Pour $K \geqslant 1$, on appelle *arbre ℓ_1^+-K-faiblement nul sur X*, un arbre faiblement nul $(x_s)_{s\in T_\alpha^\omega}$ sur X tel que tout noeud x_s soit une ℓ_1^+-K suite, i.e pour tout s, x_s est de norme 1, $(x_t)_{t\leqslant s}$ est K-basique et vérifie

$$\frac{1}{K}\sum_{t\leqslant s} a_t \leqslant \left\|\sum_{t\leqslant s} a_t x_t\right\|, \text{ pour tout } (a_t)_{t\leqslant s}\subset \mathbb{R}^+.$$

Comme pour l'indice ℓ_1, on pose

$$I_\omega^+(X,K) = \sup\{o(T) : T \text{ est un arbre } \ell_1^+\text{-K-faiblement nul sur } X\}.$$

L'indice correspondant est donné par

$$I_\omega^+(X) = \sup_{K \geqslant 1} I_\omega^+(X, K).$$

Cet indice, introduit par D. Alspach, R. Judd and E. Odell [3], possède les propriétés suivantes

Théorème 6.2.6 (Alspach-Judd-Odell)**.** *Soit X un espace de Banach séparable, alors*

i) Si X ne contient pas ℓ_1, $I_\omega^+(X) < \omega_1$, si et seulement si, X^* est séparable.

ii) Si X^* est séparable, alors $I_\omega^+(X) = \omega^\alpha$, avec $\alpha < \omega_1$.

iii) Si X ne contient pas ℓ_1, on a $I_\omega^+(X) = S_z(X)$.

Remarque 2.7 La condition "X ne contient pas ℓ_1" du i) est nécessaire car $I_\omega^+(\ell_1) = 0$. En effet, ℓ_1 étant un espace de Schur, il n'existe pas d'arbres faiblement nuls différents de T_0^ω dans ℓ_1.

6.3 Arbres à branchements dénombrables et indice de Szlenk

On a vu que l'on pouvait plonger trivialement l'arbre (T_∞^ω, ρ) dans ℓ_1 et c_0. D'après le théorème de dichotomie de James [41] on a

Théorème 6.3.1 (James)**.** *Soit X un espace de Banach à base inconditionnelle, alors X est réflexif, si et seulement si, X ne contient pas c_0 ou ℓ_1.*

Dans le théorème suivant on étudie le cas des espaces de Banach réflexifs à base inconditionnelle.

Théorème 6.3.2. *Soit X un espace de Banach réflexif, possédant une base inconditionnelle. Si $S_z(X) > \omega$, alors les arbres (T_n^ω, ρ), se plongent uniformément métriquement dans X.*

Démonstration. On sait que X ne contient pas ℓ_1, donc on a égalité entre l'indice de Szlenk et l'indice ℓ_1+-faiblement nul de X. Ainsi $I_\omega^+(X) > \omega$ et donc $\exists K \geqslant 1$, tel que $\forall N$, $\exists (x_s)_{s \in T_N^\omega} \subset S_X$ telle que

$$\forall s \in D(T_N^\omega) \qquad x_{s^\frown n} \xrightarrow{\omega} 0$$

et

$$\frac{1}{K} \sum_{t \leqslant s} a_t \leqslant \left\| \sum_{t \leqslant s} a_t x_t \right\|, \text{ pour tout } s \in T_N^\omega, \text{ et } (a_t)_{t \leqslant s} \subset \mathbb{R}^+.$$

Soient (e_i) la base inconditionnelle de X, et $\sigma \subset \mathbb{N}$, on définit la projection P_σ comme étant la projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(e_i)_{i\in\sigma}$. La projection sur le vecteur e_i sera simplement notée P_i. La base étant inconditionnelle, il existe $\theta \geqslant 1$ telle que pour tout $\sigma \subset \mathbb{N}$, $\|P_\sigma\| \leqslant \theta$. On peut renormer et supposer que $\theta = 1$.

Montrons que pour tout N, on peut constuire un isomorphisme d'arbres $\Phi : T_N^\omega \to \Phi(T_N^\omega)$ et deux familles $\left(x_{\Phi(s)}\right)_{s\in T_N^\omega}$, et $(y_s)_{s\in T_N^\omega}$ telle que :

- le support de y_s est fini, pour tout s
- y_s et y_t ont des supports disjoints si $s \neq t$
- $\frac{(2K-1)\|x_{\Phi(s)}\|}{2K} \leqslant \|y_s\| \leqslant \|x_{\Phi(s)}\| = 1$
- $\|x_{\Phi(s)} - y_s\| \leqslant \frac{1}{2K}$.

Soit $(n_k)_k$ une énumération des noeuds terminaux. On note B_k la branche formée des antécédents du noeud n_k. On énumère les noeuds de B_1 dans l'ordre croissant, puis ceux de $B_2 \setminus B_1, \ldots,\ B_{k+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^k Bi)$ et ainsi de suite. L'énumération ainsi obtenue est notée $(s_i)_{i\geqslant 1}$. On construit $\Phi(s_1) = s_1$ et y_{s_1} par troncature de $x_{\Phi(s_1)}$. On suppose $\Phi(s_1),\ldots,\Phi(s_n)$ et $y_{s_1},\ldots,y_{s_n}$ construits. Soit s_{n+1} est incomparable avec les s_i pour tout $i \leqslant n$, et donc $s_{n+1} = \{p\}$. Comme $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, on peut choisir $\Phi(s_{n+1}) = \{p'\}$ pour p' assez grand tel que :

- pour tout $i \leqslant n$, $\|P_i(x_{p'})\| \leqslant \frac{\|x_{p'}\|}{4Kn_i}$, où n_i est le cardinal de l'union des supports des vecteurs $y_{s_1},\ldots,y_{s_n}$;

- on puisse trouver σ fini tel que $\forall i \leqslant n,\ \sigma \bigcap \mathrm{supp}(y_{s_i}) = \emptyset$

  et $\|y_{s_{n+1}} - x_{\Phi(s_{n+1})}\| < \frac{1}{2K}$, où $y_{s_{n+1}} = P_\sigma(x_{\Phi(s_{n+1})})$.

Soit il existe $i \leqslant n$ tel que $s_{n+1} = s_i \frown p$. Or $x_{\Phi(s_i)\frown n} \xrightarrow{\omega} 0$ et on choisit $x_{\Phi(s_{n+1})}$ et $y_{s_{n+1}}$, avec $\Phi(s_{n+1}) = \Phi(s_i) \frown p'$, pour p' assez grand comme précédemment.
On remarque que l'énumération et l'extraction conservent l'ordre et que les intervalles de noeuds sont envoyés sur des intervalles de noeuds de même longueurs. On définit le plongement par

$$\begin{array}{rcl} f : T_N^\omega & \to & X \\ s \neq \varnothing & \mapsto & \sum_{t\leqslant s} y_t \\ \varnothing & \mapsto & 0 \end{array}$$

Soient $s,s' \in T_N^\omega$ et δ leur dernier ancêtre commun, alors

$$\|f(s) - f(s')\| = \left\| \sum_{\delta<t\leqslant s} y_t - \sum_{\delta<t\leqslant s'} y_t \right\|.$$

Si on note $d = |s| - |\delta|$ et $d' = |s'| - |\delta|$, alors

$$\|f(s) - f(s')\| \leqslant (d + d') = \rho(s, s').$$

De plus si $\sigma_s = \bigcup_{\delta < t \leqslant s} \mathrm{supp}(y_t)$, on a

$$\begin{aligned}
\|P_{\sigma_s}(f(s) - f(s'))\| &= \left\| \sum_{\delta < t \leqslant s} y_s \right\| \\
&\geqslant \left\| \sum_{\delta < t \leqslant s} x_{\Phi(t)} \right\| - \sum_{\delta < t \leqslant s} \|y_t - x_{\Phi(t)}\| \\
&\geqslant \tfrac{d}{2K}.
\end{aligned}$$

Si on utilise la projection $P_{\sigma_{s'}}$ on obtient

$$\|P_{\sigma_{s'}}(f(s) - f(s'))\| \geqslant \frac{d'}{2K}.$$

Finalement en sommant on a

$$\frac{\rho(s, s')}{4K} \leqslant \|f(s) - f(s')\| \leqslant \rho(s, s').$$

□

6.4 Plongement quasi-isométrique d'arbres à branchements dénombrables

Pour commencer il est clair, à l'instar de l'arbre dyadique hyperbolique infini (B_∞, ρ), que l'arbre hyperbolique infini à branchements dénombrables (T_∞^ω, ρ) se plonge isométriquement dans ℓ_1, et avec distortion 2 dans c_0. Or l'indice de Szlenk de c_0 est égal à ω. La réciproque du théorème 6.3.2 est donc fausse. On ne peut donc pas espérer caractériser les espaces de Banach qui ont un indice de Szlenk strictement supérieur à ω grâce à l'arbre T_∞^ω.

On dira qu'un espace métrique M se plonge *quasi-isométriquement* dans un espace métrique N, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un plongement Lipschitzien f_ϵ de M dans N, tel que $\mathrm{dist}(f_\epsilon) \leqslant 1 + \epsilon$.

On montre le résultat suivant

Proposition 6.4.1. *Pour tout n,*
(T_n^ω, ρ) se plonge quasi-isométriquement dans $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_{1+\frac{1}{k}}\right)_{\ell_2}$.

Démonstration. Fixons n et $\epsilon > 0$. Notons $(e_s)_{s\in T_n^\omega}$ la base canonique des espaces $\ell_{1+\frac{1}{k}}$. On peut toujours trouver un indice k assez grand tel que le plongement soit donné par

$$
\begin{aligned}
f_\epsilon : T_n^\omega &\to \left(\textstyle\sum_k \ell_{1+\frac{1}{k}}\right)_{\ell_2} \\
t &\mapsto (\underbrace{0,\dots,0}_{k-1 \text{ zéros}}, \sum_{s\leqslant t} e_s, 0, \dots)
\end{aligned}
$$

En effet, on a

$$\|f_\epsilon(t) - f_\epsilon(t')\| = \rho(t,t')^{\frac{k}{k+1}}$$

Or

$$1 \leqslant \frac{\rho(t,t')}{\rho(t,t')^{\frac{k}{k+1}}} = \rho(t,t')^{\frac{1}{k+1}} \leqslant (2n)^{\frac{1}{k+1}} \leqslant 1+\epsilon,$$

pour k assez grand, lorsque la distance hyperbolique entre t et t' est plus grande que 1, ce qui est le cas quand $t \neq t'$.
Ainsi

$$\frac{\rho(t,t')}{1+\epsilon} \leqslant \|f_\epsilon(t) - f_\epsilon(t')\| \leqslant \rho(t,t'), \text{ pour tous } t,t' \in T_n^\omega.$$

□

En utilisant la technique de recollement, on peut montrer que

Proposition 6.4.2. *L'arbre hyperbolique infini à branchements dénombrables (T_∞^ω, ρ) se plonge métriquement dans* $X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_{1+\frac{1}{k}}\right)_{\ell_2}$.

L'espace X de la proposition 6.4.2 possède des propriétés intéressantes. En effet on peut plonger l'arbre (T_∞^ω, ρ) dans un espace réflexif, avec un indice de Szlenk minimal au regard du théorème 6.3.2.

Nous allons maintenant donner une preuve que $S_z(X) = \omega^2$ en utilisant une technique classique de [38].

Soit $Z = \left(\sum_{n\geqslant 1} Z_n\right)_{\ell_2}$ et $Y_N = \left(\sum_{n=1}^{N} Z_n\right)_{\ell_2}$.

On note P_N la projection de $Z^* = \left(\sum_{n\geqslant 1} Z_n^*\right)_{\ell_2}$ sur $Y_N^* = \left(\sum_{n=1}^{N} Z_n^*\right)_{\ell_2}$.

On montre le lemme suivant

Lemme 6.4.3. *Soit $z \in B_{Z^*}$ et α un ordinal. Si $\|P_N(z)\|^2 > 1 - \epsilon^2$ et $z \in s^{\alpha}_{\sqrt{3}\epsilon}(B_{Z^*})$, alors $P_N(z) \in s^{\alpha}_{\epsilon}(B_{Y_N^*})$.*

Démonstration. Démontrons ce lemme par une récurrence transfinie sur l'ordinal α.

– Il est clair que pour $\alpha = 0$ la propriété est vraie car les projections sont de normes 1.

– Le cas où α est un ordinal limite est aussi immédiat.

– Traitons maintenant le cas d'un ordinal successeur.

On veut montrer que si $P_N(z) \notin s^{\alpha+1}_{\epsilon}(B_{Y_N^*})$ et $\|P_N(z)\|^2 > 1 - \epsilon^2$, alors $z \notin s^{\alpha+1}_{\sqrt{3}\epsilon}(B_{Z^*})$.
On peut supposer que $z \in s^{\alpha}_{\sqrt{3}\epsilon}(B_{Z^*})$ et donc $P_N(z) \in s^{\alpha}_{\epsilon}(B_{Y_N^*})$. On en déduit l'existence d'un voisinage préfaible de $P_N(z)$ dans Y_N^*, que l'on note $V = \bigcap_{i=1}^{m}\{f_i > \gamma_i\}$ où $f_i \in Y_N$, tel que

$$\operatorname{diam}\left(V \bigcap s^{\alpha}_{\epsilon}(B_{Y_N^*})\right) < \epsilon$$

et

$$P_N(z) \in V \bigcap s^{\alpha}_{\epsilon}(B_{Y_N^*}).$$

On peut supposer que $V \bigcap \sqrt{1-\epsilon^2} B_{Y_N^*} = \emptyset$.

On appelle W le voisinage préfaible dans Z^*, de la forme $\bigcap_{i=1}^{m}\{g_i > \gamma_i\}$, où les applications g_i sont les applications f_i que l'on prolonge en rajoutant des coordonnées nulles. Il est clair que $z \in W \bigcap s^{\alpha}_{\sqrt{3}\epsilon}(B_{Z^*})$. De plus, si $y \in W \bigcap s^{\alpha}_{\sqrt{3}\epsilon}(B_{Z^*})$, alors $P_N(y) \in V$ et donc $\|P_N(y)\|^2 > 1 - \epsilon^2$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $P_N(y) \in s_\epsilon^\alpha(B_{Y_N^*})$ et donc,

$$P_N(y) \in V \bigcap s_\epsilon^\alpha(B_{Y_N^*}).$$

Ainsi pour tous y, $y' \in W \bigcap s_{\sqrt{3}\epsilon}^\alpha(B_{Z^*})$,

$$P_N(y) \text{ et } P_N(y') \in V \bigcap s_\epsilon^\alpha(B_{Y_N^*}),$$

ce qui implique que $\|P_N(y) - P_N(y')\| < \epsilon$. On en déduit que $\|y - y'\| < \sqrt{3}\epsilon$, et que diam $\Big(V \bigcap s_{\sqrt{3}\epsilon}^\alpha(B_{Z^*})\Big) < \epsilon$. Ceci prouve que $z \notin s_{\sqrt{3}\epsilon}^{\alpha+1}(B_{Z^*})$. $\square$

Les espaces $\ell_{1+\frac{1}{n}}$ ont tous un indice de Szlenk égal à ω. D'après le lemme précédent on a que, $\forall \epsilon > 0$ $s_\epsilon^\omega(B_X^*) \subset (1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{3}})B_X^*$, et donc $S_z(X) \leqslant \omega^2$. Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$\lim_{k\to\infty} S_z(\ell_{1+\frac{1}{k}}, \frac{1}{2}) = +\infty.$$

Alors, $S_z(X, \frac{1}{2}) > \omega$ et $S_z(X) \geqslant \omega^2$.

Annexe A

Autour du contre-exemple d'Aharoni

A.1 Le contre-exemple d'Aharoni

On appelle contre-exemple d'Aharoni, le dernier résultat de l'article [1].

Proposition A.1.1 (Aharoni). *Il existe un sous-ensemble de ℓ_1 qui ne se plonge pas métriquement dans c_0 avec une distortion strictement plus petite que* 2.

La preuve est très courte et nous la redonnons ici, car elle est à la base des résultats de cette annexe.

Démonstration. Soit $f : \ell_1 \to c_0$ vérifiant

$$\|x-y\|_1 \leqslant \|f(x)-f(y)\|_\infty \leqslant C\|x-y\|_1,$$

pour tous $x,y \in \ell_1$.
Sans perte de généralité on peut supposer que $f(0) = 0$. Supposons que $C < 2$ et donc $4-2C > 0$. Notons $(e_i)_{i=1}^\infty$ la base canonique de ℓ_1. Soit

$$M = \{n \in \mathbb{N} : |f(e_1)_n - f(e_2)_n| \geqslant 4-2C\}.$$

Pour tous $i,j \geqslant 3$, $i \neq j$ on définit

$$M_{i,j} = \{n \in \mathbb{N} : |f(e_i)_n - f(e_j)_n| \geqslant 4-2C\}.$$

M et $M_{i,j}$ sont des ensembles finis. De plus, pour tous $i,j \geqslant 3$, $i \neq j$, $M \bigcap M_{i,j} \neq \emptyset$. En effet,

$$\|f(e_1+e_i)-f(e_2+e_j)\|_\infty \geqslant \|(e_1+e_i)-(e_2+e_j)\|_1 = 4$$

Donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$|f(e_1+e_i)_{n_0} - f(e_2+e_j)_{n_0}| \geqslant 4$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|f(e_1)_{n_0} - f(e_2)_{n_0}| \geqslant\ & |f(e_1+e_i)_{n_0} - f(e_2+e_j)_{n_0}| - \\
& |f(e_1+e_i)_{n_0} - f(e_1)_{n_0}| - |f(e_2+e_j)_{n_0} - f(e_2)_{n_0}| \\
\geqslant\ & 4 - \|f(e_1+e_i) - f(e_1)\|_\infty - \|f(e_2+e_j) - f(e_2)\|_\infty \\
\geqslant\ & 4 - C - C = 4 - 2C.
\end{aligned}$$

Ainsi $n_0 \in M$. Le même raisonnement montre que $n_0 \in M_{i,j}$, et donc $M \bigcap M_{i,j} \neq \emptyset$. Soit P_M la projection canonique de c_0 sur $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in M}$. Alors $(P_M f(e_i))_{i=3}^{\infty}$ est un ensemble borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Ceci contredit le fait que la distance entre deux points quelconques de cette suite est minorée par $4-2C>0$. □

A.2 Distortion optimale

Notons

$$C_{Ah} = \inf\left\{C : \forall M \text{ métrique séparable, } \ M \overset{C}{\hookrightarrow} c_0\right\}.$$

I. Aharoni a montré que $2 \leqslant C_{Ah} \leqslant 6+\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$.
La distortion a été améliorée par P. Assouad dans [5], où il est démontré que $C_{Ah} \leqslant 3+\epsilon$, pour tout $\epsilon>0$.
Une nouvelle étape a été franchie par J. Pelant [76] qui montre, en 1994, que $C_{Ah} \leqslant 3$ et que ce résultat est optimal pour les plongements dans c_0^+, le cône positif de c_0.
Finalement en 2007, N. J. Kalton et G. Lancien ont prouvé que $C_{Ah} = 2$. Le résultat de Kalton et Lancien est le premier à utiliser un plongement dans c_0 tout entier et non pas, à l'instar des résultats cités précédemment, un plongement dans c_0^+.

A.3 Une extension du contre-exemple d'Aharoni

Le contre-exemple d'Aharoni indique que l'on ne peut pas plonger métriquement ℓ_1 dans c_0 avec une distortion $2 - \epsilon$, avec $\epsilon > 0$.

Quelles conséquences sur le compact K, le fait de pouvoir plonger métriquement ℓ_1 dans un espace $C(K)$, implique-t-il ? C'est à cette question que nous allons partiellement répondre dans cette section.

A.3.1 Dérivation de Cantor

Nous avons besoin de définir la dérivation de Cantor pour les espaces compacts.

Définition A.3.1. *Soit K un espace topologique compact. On définit K', l'ensemble dérivé de Cantor, par :*

$$K' = \{x \in K : x \text{ est un point d'accumulation de } K\}.$$

K' est donc le compact K privé de ses points isolés.

Remarque 3.2 Si K est métrisable,

$$K' = \{x \in K : \exists (x_n)_n \subset K \setminus \{x\} \text{ tel que } x_n \to_{n \to \infty} x\}.$$

On définit par récurrence transfinie les compacts K^α, pour l'ordinal α :
$K^0 = K$, $K^1 = K'$
si α est un ordinal sucesseur ($\alpha = \beta + 1$), $K^{\beta+1} = (K^\beta)'$,
si α est un ordinal limite, $K^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} K^\beta$.
On note $\mathrm{ord}(K)$ le plus petit ordinal α tel que $K^\alpha = \emptyset$.

La dérivation de Cantor possède les propriétés suivantes

Proposition A.3.3. *Soit K un compact métrique, alors*

1. *K est fini $\iff K' = \emptyset \iff K$ est discret.*
2. *K est dénombrable $\iff \exists \alpha < \omega_1$ tel que $K^\alpha = \emptyset$.*
3. *K est non dénombrable $\iff \exists \alpha < \omega_1$ tel que $K^{\alpha+1} = K^\alpha \neq \emptyset$.*

A.3.2 Plongement de ℓ_1 dans les espaces $C(K)$

La proposition suivante permet de retouver le contre-exemple d'Aharoni.

Proposition A.3.4. *Soit K un compact métrisable. Soit $\epsilon > 0$, et supposons que $\ell_1 \overset{2-\epsilon}{\hookrightarrow} C(K)$. Alors, $K'' \neq \emptyset$*

Démonstration. Soit $f : \ell_1 \to C(K)$ telle que

$$\|x-y\|_1 \leqslant \|f(x)-f(y)\|_\infty \leqslant (2-\epsilon)\|x-y\|_1,$$

pour tous $x,y \in \ell_1$. On peut supposer que $f(0) = 0$. Soient, n, m, i, j des entiers tous différents. Pour l'instant nous travaillons à m et n fixés.
$\|f(e_n+e_i) - f(e_m+e_j)\|_\infty \geqslant 4$, donc il existe $\beta \in K$ tel que

$$|f(e_n+e_i)(\beta) - f(e_m+e_j)(\beta)| \geqslant 4 \tag{A.1}$$

D'où

$$|f(e_i)(\beta) - f(e_j)(\beta)| \geqslant 2\epsilon \tag{A.2}$$

$$|f(e_n)(\beta) - f(e_m)(\beta)| \geqslant 2\epsilon \tag{A.3}$$

Soit

$$B = \{\beta \in K : \exists i \neq j \text{ vérifiant } A.1\}.$$

B est infini. En effet, supposons B fini et définissons

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{N} & \to & \ell_\infty(B) \\ k & \mapsto & (f(e_k)(\beta))_{\beta\in B} \end{array}$$

Soit $i \neq j$, il existe $\beta_0 \in K$ vérifiant A.1, et donc $\beta_0 \in B$. De plus, β_0 vérifie A.2 ainsi la suite $(\Phi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et séparée dans un espace de dimension finie, ce qui est impossible. Donc B admet un point d'accumulation, c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in \overline{B} \bigcap K' \neq \emptyset$. Montrons que K' est infini.

Soit

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{N} & \to & \ell_\infty(K') \\ k & \mapsto & (f(e_k)(\beta))_{\beta\in K'} \end{array}$$

Soit $m \neq n$, il existe $\beta \in K'$ tel que $|f(e_n)(\beta) - f(e_m)(\beta)| \geqslant 2\epsilon$, par continuité des applications $f(e_n)$ et $f(e_m)$ pour n et m fixés. Par compacité on en déduit une nouvelle fois que K' est infini, et donc $K'' \neq \emptyset$. □

Si l'on suppose que l'espace $C(K)$ contient ℓ_1 quasi-isométriquement, i.e avec une distortion aussi proche de 1 que l'on veut, le résultat reste vrai pour des dérivés de Cantor d'ordre plus élevé. En réalité, on va prouver le résultat suivant

Proposition A.3.5. *Supposons que* $\forall \epsilon > 0$ $\ell_1 \overset{1+\epsilon}{\hookrightarrow} C(K)$*, alors* $\forall \epsilon > 0$ $\exists f : c_{00} \to C(K^\alpha)$ $\forall \alpha < \omega$*, telle que pour tous* $x, y \in c_{00}$*,* x *et* y *à supports disjoints, on ait*

$$\frac{\|x-y\|_1}{1+\epsilon} \leqslant \|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant \|x-y\|_1.$$

En particulier $K^\omega \neq \emptyset$.

Démonstration. On rappelle que c_{00} est l'ensemble des suites à supports finis. On montre le résultat par récurrence. Soit $\epsilon > 0$,
$\exists g : c_{00} \to C(K)$ et ϵ', que le fixera plus tard, tels que

$$\frac{\|x-y\|_1}{1+\epsilon'} \leqslant \|g(x) - g(y)\|_\infty \leqslant \|x-y\|_1.$$

On pose $\forall x \in c_{00}$,

$$f(x) = g(x)_{|K'} \in C(K').$$

K' étant inclus dans K il est clair que $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant \|x-y\|_1$. Soient $x, y \in c_{00}$, à supports disjoints tels que $\|x-y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1 = \delta > 0$, pour un certain δ fixé. Pour i et j n'appartenant pas à la réunion des supports de x et y, on a

$$\|g(x+\delta e_i) - g(y+\delta e_j)\|_\infty \geqslant \frac{3\delta}{1+\epsilon'} \tag{A.4}$$

donc il existe $\beta \in K$ tel que

$$|g(x+\delta e_i)(\beta) - g(y+\delta e_j)(\beta)| \geqslant \frac{3\delta}{1+\epsilon'} \tag{A.5}$$

D'où,

$$|g(\delta e_i)(\beta) - g(\delta e_j)(\beta)| \geqslant \frac{(2-\epsilon')\delta}{1+\epsilon'} \tag{A.6}$$

$$|g(x)(\beta) - g(y)(\beta)| \geqslant \frac{(1-2\epsilon')\delta}{1+\epsilon'} = \frac{(1-2\epsilon')\|x-y\|_1}{1+\epsilon'} \tag{A.7}$$

Soit

$$B = \{\beta \in K : \exists i \neq j \text{ vérifiant } A.5\}.$$

Pour les mêmes raisons que dans la proposition A.3.4 B est infini, et K' contient un élément β_0 tel que, par continuité de $g(x)$ et $g(y)$ à x, y fixés,

$$|g(x)(\beta_0) - g(y)(\beta_0)| \geqslant \frac{(1-2\epsilon')\|x-y\|_1}{1+\epsilon'}.$$

Ainsi

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \geqslant \frac{(1-2\epsilon')\|x-y\|_1}{1+\epsilon'}.$$

La propriété est initialisée en choisisant ϵ' tel que $\frac{1-2\epsilon'}{1+\epsilon'} > \frac{1}{1+\epsilon}$. Supposons qu'elle soit vraie pour un ordinal α. Alors la propriété est vraie pour l'ordinal $\alpha + 1$; en effet il suffit de réutiliser la démonstration pour $\alpha = 0$, avec $f = g_{|K^\alpha}$. $\square$

La démonstration ne passe pas aux ordinaux limites.

Annexe B

Différentiabilité et classification non linéaire

B.1 Propriété de Radon-Nikodým

Le point de départ du sujet de cette section est le théorème de Rademacher, généralisation aux fonctions de plusieurs variables du théorème de Lebesgue. On renvoie à l'exposé se synthèse [48], et au livre [13] pour une étude en profondeur de la classification Lipschitzienne des espaces de Banach.

Théorème B.1.1 (Rademacher)**.** *Soient X un espace de Banach de dimension finie et une application Lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

On dira qu'un espace de Banach Y a la propriété de Radon-Nikodým (RNP), si et seulement si, toute fonction Lipschitzienne $f : [0,1] \to Y$ est différentiable presque partout.
Le théorème de Rademacher reste vrai lorsque l'application Lipschitzienne est à valeurs dans un espace qui possède RNP. Il existe de nombreuses définitions équivalentes de la propriété de Radon-Nikodým, notamment reliées à la dentabilité des ensembles convexes fermés bornés de l'espace. Le livre de J. Diestel et J. J. Uhl Jr. [28] contient un exposé très détaillé sur la propriété de Radon-Nikodým. La proposition suivante regroupe deux critères usuels pour tester si un espace de Banach a RNP.

Proposition B.1.2. *Si un espace de Banach séparable X possède une des propriétés suivantes alors il a la propriété de Radon-Nikodým*

i) X est un espace réflexif

ii) $X = Y^*$, où Y est un espace de Asplund, i.e tout sous-espace séparable de Y a un dual séparable

Les exemples classiques d'espaces ayant la propriété RNP sont donc les espaces L_p $(1 < p < \infty)$ et ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Les espaces élémentaires qui n'ont pas RNP sont c_0, ℓ_∞, L_∞, L_1 et $C([0,1])$.
La propriété de Radon-Nikodým est séparablement déterminée. Elle est aussi stable par isomorphisme linéaire. On pourra déduire des résultats qui vont suivre, qu'elle est aussi stable par homéomorphisme Lipschitzien.
En dimension infinie il est impossible de trouver une mesure, dont les ensembles de mesure nulle, jouent le rôle des ensembles de mesure de Lebesgue nulle dans le théorème de Rademacher. En effet, l'existence d'une mesure "utile" (telle que la mesure d'une boule non vide soit strictement positive et finie) invariante par translation fait défaut. La principale difficulté pour étendre le théorème de Rademacher lorsque l'espace de départ est de dimension infinie est la définition d'une notion d'ensemble négligeable ad hoc, sur ces espaces. Ce problème a été résolu dans les années 70 indépendamment par J. P. R. Christensen [23], P. Mankiewicz [64] et N. Aronszajn [4]. Nous allons présenter la notion d'ensemble Gauss-nul introduite par R. R. Phelps [76].

B.2 Ensembles négligeables

B.2.1 Ensembles Gauss-nuls

On appellera mesure sur un espace de Banach une mesure scalaire σ-additive définie sur la tribu Borélienne de X. Nous devons tout d'abord définir les mesures Gaussiennes sur un espace de Banach. Les mesures Gaussiennes sont étroitement liées au mouvement Brownien et tirent leurs origines de la mesure de Wiener sur $C([0,1])$.

Définition B.2.1. *Une mesure de probabilité sur un espace de Banach X est une* mesure Gaussienne *si pour toute forme linéaire $x^* \in X^*$, la mesure μ_{x^*} sur la droite réelle, définie par*

$$\mu_{x^*}(A) = \mu\{y \in X \;:\; \langle x^*, y\rangle \in A \subset \mathbb{R}\}$$

a une distribution Gaussienne. La mesure Gaussienne μ est dite non dégénérée *si pour tout $x^* \neq 0$ la distribution de μ_{x^*} est non dégénérée.*

Pour l'existence de mesures Gaussiennes sur les espaces de Banach (séparables) et un exposé plus détaillé de ces notions, on se reportera à [81].

Définition B.2.2. *Soit A un ensemble Borélien d'un espace de Banach séparable X. A est un ensemble* Gauss-nul *si $\mu(A) = 0$ pour toute mesure Gaussienne non dégénérée sur X.*

Par définition, il est immédiat que la notion “être Gauss-nul” est stable par union dénombrable, translation et par passage à un sous-ensemble Borélien.

B.2.2 Ensembles Aronszajn-nuls

Les ensembles Gauss-nuls coïncident avec les ensembles Aronszajn-nuls, introduits par N. Aronszajn [4] en 1976.
Pour $y \in X \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{A}(y)$ la famille de tous les Boréliens A de X, qui intersectent toute droite parallèle à y selon un ensemble unidimensionnel de mesure de Lebesgue nulle. Si $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite finie ou infinie d'éléments non nuls de X, on note par $\mathcal{A}(\{x_n\}_n)$ la famille de tous les Boréliens A qui se décomposent comme $A = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$, où $A_n \in \mathcal{A}(x_n)$ pour tout n.
Une suite de X est dite totale, si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans X.

Définition B.2.3. *Soient A et X comme précédemment,*
A est dit Aronszajn-nul *s'il appartient à $\bigcap \mathcal{A}(\{x_n\}_n)$, où l'intersection est prise sur toutes les suites totales $\{x_n\}_n$. Autrement dit, pour toute suite totale $\{x_n\}_n$, A peut se décomposer en une union de Boréliens $\bigcup_n A_n$ tels que $A_n \in \mathcal{A}(x_n)$ pour tout n.*

B.3 Linéarisation des applications Lipschitziennes

Si f est une application de X dans Y, on dit que f est *Gâteaux-différentiable en $x_0 \in X$* s'il existe une unique application linéaire continue $T \in B(X,Y)$ telle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0+tx) - Tx\|}{t} = 0, \ x \in X.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat central de cette annexe

Théorème B.3.1. *Soit X un espace de Banach séparable, et supposons que Y est un espace de Banach ayant RNP. Soit $f : U \subset X \to Y$ une application Lipschitzienne sur un ouvert U de X. Alors l'ensemble des points où f est non Gâteaux-différentiable est Aronszajn-nul.*

Ce théorème est dû à N. Aronszjan ([4], 1976), à J. P. R. Christiensen ([23], 1973) pour la notion d'ensemble Haar-nul et P. Mankiewicz ([64], 1973) pour les ensembles cube-nuls. On trouvera une démonstration dans

[13]. L'application aux plongements Lipschitziens est quasi immédiate. En effet, un plongement Lipschitzien $f : X \to Y$ vérifie des inégalités du type

$$\frac{1}{C_1}\|x-y\| \leqslant \|f(x)-f(y)\| \leqslant C_2\|x-y\|,\ x,y \in X$$

pour des constantes strictement positives. D'après le théorème précédent, il existe au moins un point $x_0 \in X$ tel que f est Gâteaux-différentiable en x_0. Si T est la Gâteaux-différentielle de f en x_0 on a,

$$\frac{1}{C_1}\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant C_2\|x\|,\ x \in X.$$

T est un plongement linéaire de X dans Y. On vient de démontrer le corollaire suivant

Théorème B.3.2. *Soient X un espace de Banach séparable et Y un espace de Banach avec RNP. Si X se plonge Lipschitziennement dans Y. Alors X se plonge linéairement dans Y.*

B.4 Utilisation de la différentiabilité préfaible

Lorsque l'espace d'arrivée Y n'a pas RNP on ne peut utiliser la Gâteaux-différentiabilité. Cependant, si Y est un espace dual on peut obtenir un résultat similaire, sans supposer que Y a RNP, en utilisant la différentiabilité préfaible (w^*-différentiabilité).

Définition B.4.1. *Soit f une application de X dans $Y = Z^*$. f est w^*-Gâteaux-différentiable en $x_0 \in X$, si la limite préfaible*

$$D_f^*(x_0)x = w^* - \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}$$

existe pour tout $x \in X$, et donne lieu à une application linéaire continue en x.
L'opérateur borné $D_f^*(x_0)$ est appelé la w^*-différentielle de f en x_0.

Remarque 4.2 Si f est Lipschitzienne, alors la w^*-semi-continuité inférieure de la norme implique que $\|D_f^*(x_0)\| \leqslant \|f\|_{Lip}$.

Pour la différentiabilité préfaible on a le résultat suivant

Proposition B.4.3 (Heinrich-Mankiewicz). *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si X est séparable et si f est une application Lipschitzienne de X dans Y^*, alors f est w^*-Gâteaux différentiable en dehors d'un ensemble Gauss-nul.*
De plus si f est un plongement Lipschitzien, il existe un point $x_0 \in X$ tel que la différentielle préfaible de f en x_0 soit un plongement linéaire de X dans Y^*.

Corollaire B.4.4. *Soit X un espace de Banach séparable, et Y un espace de Banach quelconque.*
Si X se plonge Lipschitziennement dans Y^*, alors X est linéairement isomorphe à un sous-espace de Y^*.
En particulier, si X est métriquement homéomorphe à un sous-ensemble de Y, alors X se plonge linéairement dans Y^{**}.

Il est temps maintenant de donner la preuve de la proposition 5.5.1, que nous rappellons ici.

Proposition 5.5.1.(Kalton) *Soit X un espace de Banach séparable métriquement universel pour les espaces métriques compacts alors :*

i) *X n'a pas la propriété de Radon-Nikodým,*

ii) *X^{**} contient une copie isomorphique de c_0 et donc X^* contient une copie isomorphique complémentée de ℓ_1.*

Démonstration. Soit $K_0 = \{(y_n)_{n\geqslant 1} \in c_0 \,; |y_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$ un compact de c_0. On définit l'application linéaire et 1-Lipschitzienne S par :

$$\begin{array}{rcl} S : c_0 & \to & c_0 \\ (x_n)_{n\geqslant 1} & \mapsto & (\frac{x_n}{n})_{n\geqslant 1} \end{array}$$

On remarquera que $S(\overline{B}_{c_0}) = K_0$. Soit f un plongement Lipschitzien de K_0 dans X. Montrons tout d'abord que X ne peut pas avoir RNP.
Remarquons que $f \circ S$ est Lipschitzienne de B_{c_0} dans X, mais ne constitue plus un plongement. Cependant il existe $x \in B_{c_0}$ tel que

$$D(f \circ S)(x) := T \in B(c_0, X).$$

Soit $h \in c_{00}$, il existe $k \in c_0$ tel que $Sk = h$. Soit $V(h) = T \circ S^{-1}(h)$. On a

$$\frac{\|f \circ S(x+tk) - f \circ S(x) - tTk\|}{t} = \frac{\|f(Sx+tSk) - f(Sx) - tTk\|}{t} \overset{t\to 0}{\to} 0.$$

Donc,
$$\frac{1}{C}\|Sk\| \leqslant \frac{\|f(Sx+tSk)-f(Sx)\|}{t} \leqslant C\|Sk\|$$
En passant à la limite quand t tend vers 0,
$$\frac{1}{C}\|Sk\| \leqslant \|Tk\| \leqslant C\|Sk\|$$
$$\frac{1}{C}\|h\| \leqslant \|Vh\| \leqslant C\|h\|.$$
V est plongement linéaire de c_{00} dans X, que l'on prolonge pas densité à c_0. X contient une copie linéaire de c_0, il ne peut donc pas avoir RNP.

Maintenant, en regardant X comme sous-espace de X^{**}, on montre en utilisant le Corollaire B.4.4 que $c_0 \subset X^{**}$ et donc que ℓ_1 est complémenté dans X^* d'après C. Bessaga et A. Pełczyński [14]. $\square$

Pour utiliser l'outil fondamental qu'est la différentiation, nous devons demander à l'espace d'arrivée d'avoir RNP ou bien d'être un dual. Le théorème d'Aharoni témoigne que ces hypothèses sont effectivement essentielles.

Bibliographie

[1] I. Aharoni, *Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0^+*, Israel J. Math. **19** (1974), 284-291.

[2] F. Albiac et N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, New York, 2006.

[3] D. Alspach, R. P. Judd et E. Odell, *The Szlenk index and local ℓ_1-indices*, Positivity **9** (2005), 1-44.

[4] N. Aronszajn, *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Studia Math. **57** (1976), 147-140.

[5] P. Assouad, *Remarques sur un article de Israel Aharoni sur les plongements lipschitziens dans c_0 (Israel J. Math. 19 (1974), 284-291)*, Israel J. Math. **31** (1978), 97-100.

[6] M. F. Atiyah et I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422-433.

[7] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Réedition de la version originale de 1932, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.

[8] F. Baudier, *Embedding of proper metric spaces into Banach spaces*, preprint

[9] F. Baudier, *Metrical characterization of super-reflexivity and linear type of Banach spaces*, Archiv Math. **89** (2007), 419-429.

[10] F. Baudier et G. Lancien, *Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 1029-1033.

[11] P. Baum et A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Enseign. Math. **46** (2000), 3-42. first distributed : 1982.

[12] P. Baum, A. Connes et N. Higson, *Classifying spaces for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, in C^*-algebras 1943-1993 : a fifty year celebration (Contemporary Mathematics **167**, 241-291), 1994.

[13] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss, *Geometric non linear functional analysis.* Vol. 1, American Mathematical Society Colloqium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[14] C. Bessaga et A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. **17** (1958), 151-164.

[15] B. Bossard, *Théorie descriptive des ensembles en géométrie des espaces de Banach*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1994.

[16] J. Bourgain, *On convergent sequences of continuous functions*, Bull. Soc. Math. Bel. **32** (1980), 235-249.

[17] J. Bourgain, *On Lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space*, Israel J. Math. **52** (1985), 46-52.

[18] J. Bourgain, *The metrical interpretation of super-reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. **56** (1986), 221-230.

[19] J. Bourgain, V. Milman et H. Wolfson, *On type of metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **294** (1986), 295-317.

[20] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J.L. Krivine, *Lois stables et espaces L^p*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) **2** (1965/1966), 231-259 (French).

[21] N. Brown et E. Guentner, *Uniform embeddings of bounded geometry spaces into reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2045-2050 (electronic).

[22] S. Buyalo et V. Schroeder, *Embedding of hyperbolic spaces in the product of trees*, Geom. Dedicata **113** (2005), 75-93.

[23] J. P. R. Christensen, *Measure theoretic zero sets in infinite dimensional spaces and applications to differentiability of Lipschitz mappings*, Publ. Dép. Math. (Lyon) **10** (1973), 29-39. Actes du Deuxième Colloque d'Analyse fonctionnelle de Bordeaux (Univ. bordeaux, 1973), I, pp. 29-39.

[24] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[25] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson et A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Func. Anal. **17** (1974), 311-327.

[26] R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[27] M. M. Deza et M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, volume 15 of Algotithms and Combinatorics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[28] J. Diestel et J. J. Uhl Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[29] A. N. Dranishnikov, *On hypersphericity of manifolds with finite asymptotic dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 155-167 (electronic).

[30] Y. Dutrieux, *Géométrie non linéaire des espaces de Banach*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.

[31] Y. Dutrieux et G. Lancien, *Isometric embeddings of compact spaces into Banach spaces*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 494-501.

[32] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), 123-160.

[33] P. Enflo, *On the non existence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces*, Ark. Mat. **8** (1969), 103-105.

[34] P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281-288.

[35] T. Figiel et G. Pisier, *Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses*, C. R. Acad. Sci. Paris **279** (1974), 611-614.

[36] G. Godefroy, N. J. Kalton et G. Lacien, *Subspaces of $c_0(\mathbb{N})$ and Lipschitz isomorphisms*, Geom. funct. anal. **10** (2000), 798-820.

[37] E. Gorelik, *The uniform nonequivalence of L_p and ℓ_p*, Israel J. Math. **87** (1994), 1-8.

[38] P. Hájek et G. Lancien, *Various slicing indices on Banach spaces*, Mediterr. J. Math. **4** (2007), 179-190.

[39] S. Heinrich et P. Mankiewicz, *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*, Studia Math. **73** (1982), 225-251.

[40] P. Indyk, *Algorithmic applications of low-distortion geometric embeddings*, in 42nd annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 10-33, 2001.

[41] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 518-527.

[42] R. C. James, *Super-reflexive spaces with bases.* Pacific J. Math. **41** (1972), 409-419.

[43] W. B. Johnson et J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 2001, pp. 1-84.

[44] R. P. Judd et E. Odell, *Concerning the Bourgain ℓ_1 index of a Banach space*, Israel J. Math. **108** (1998), 145-171.

[45] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 5. Cambridge University Press, Cambridge, (1985).

[46] N. J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math. **55** (2004), 171-217.

[47] N. J. Kalton, *Coarse and uniform embeddings into reflexive spaces*, Quart. J. Math. (Oxford) **58** (2007), 393-414.

[48] N. J. Kalton, *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut. **21** (2008), 7-60.

[49] N. J. Kalton et G. Lancien, *Best constants for Lipschitz embeddings of metrics spaces into* c_0, Fund. Math. **199** (2008), 249-272.

[50] G. Kasparov et G. Yu, *The coarse Novikov conjecture and uniform convexity*, Advances Math. **206** (2006), 1-56.

[51] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), 1-29.

[52] J. L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. **39** (1981), 273-295 (French, with English summary).

[53] S. Kwapień, *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI. Studia Math. **44** (1972), 583-595.

[54] V. Lafforgue, *Un renforcement de la propriété (T). (French) [A strengthening of property (T)]*, Duke Math. J. **143** (2008), 559-602.

[55] T. Laakso, *Plane with* A_∞*-weighted metric not bilipschitz embeddable into* $\mathbb{R}^n$, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 667-676.

[56] G. Lancien, *Théorie de l'indice et problèmes de renormage en géométrie des espaces de Banach*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1992.

[57] G. Lancien, *Dentability indices and locally uniformly convex renormings*, Rocky Mountain J. Math. **23-2** (1993), 635-647.

[58] G. Lancien, *A survey on the Szlenk index and some of its applications*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **100** (2006), 209-235.

[59] J. R. Lee, A. Naor et Y. Peres, *Trees and Markov convexity*, to appear in Geometric and Functional Analysis, extended abstract in Proc. of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1028-1037, ACM, New York, 2006.

[60] J. Lindenstrauss et A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in* $\mathcal{L}_p$ *spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275-326.

[61] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1977.

[62] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1979.

[63] N. Linial, E. London et Y. Rabinovich, *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*, Combinatorica **15** (1995), 215-245.

[64] P. Mankiewicz, *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces*, Studia Math. **45** (1973), 15-29.

[65] J. Matoušek, *Bi-Lipschitz embeddings into low-dimensional Euclidean spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **31** (1990), 589-600.

[66] J. Matoušek, *On embedding trees into uniformly convex Banach spaces*, Israel J. Math. **114** (1999), 221-237.

[67] J. Matoušek, *Open problems on embeddings of finite metric spaces*, http ://kam.mff.cuni.cz/ matousek/metrop.ps.

[68] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, volume 212 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 2002.

[69] B. Maurey et G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45-90.

[70] M. Mendel et A. Naor, *Scaled Enflo type is equivalent to Rademacher type*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), 493-498.

[71] M. Mendel et A. Naor, *Metric cotype*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), 247-298.

[72] M. Mendel et A. Naor, *Markov convexity and local rigidity of distorted metrics*, SoCG '08 [extended abstract : arXiv :0803.1697].

[73] A. Naor, Y. Peres, O. Schramm et S. Sheffield, *Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces*, Duke Math. J. **134** (2006), 165-197.

[74] P. W. Nowak, *Remarks on quasi-isometric non-embeddability into uniformly convex Banach spaces*, non publié.

[75] M. I. Ostrovskii, *Coarse embeddability into Banach spaces*, preprint.

[76] J. Pelant, *Embeddings into c_0*, Topology Appl. **57** (1994), 259-269.

[77] R. R. Phelps, *Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz maps on Banach spaces*, Pacific J. Math. **77** (1978), 523-531.

[78] G. Pisier, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. **20** (1975), 326-350.

[79] G. Pisier, *On the duality between type and cotype*, Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces (Cleveland, Ohio, 1981), 131-144, Lecture Notes in Math., **939**, Springer, Berlin, 1982.

[80] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, Probability and analysis (Varenna, 1985), 167-241, Lecture Notes in Math., **1206**, Springer, Berlin, 1986.

[81] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach. (French) [Introduction to the study of Banach spaces] Analyse et probabilités. [Analysis and probability theory]*, Cours Spécialisés, Société Mathématique de France, 2004.

[82] Y. Raynaud, *Espaces de Banach superstables, distances stables et homéomorphismes uniformes*, Israel J. Math. **44** (1983), 33-52 (French with English summary).

[83] M. Ribe, *On uniformly homeomorphic normed spaces*, Ark. Mat. **14** (1976), 237-244.

[84] M. Ribe, *Existence of separable uniformly homeomorphic non isomorphic Banach spaces*, Israel J. Math. **48** (1984), 139-147.

[85] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[86] M. Searcóid, *Metric spaces*, Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, London, (2007).

[87] A. Sersouri, *Lavrientiev index for Banach spaces*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **309** (1989), 95-99.

[88] D. B. Schmoys, *Cut problems and their application to divide-and-conquer*, In Approximation Algorithms for NP-hard Problems (D.S. Hochbaum, ed.), pages 192-235, PWS, 1997.

[89] C. Stegall, *The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **206** (1975), 213-223.

[90] W. Szlenk, *The non existence of a separable reflexive space universal for all reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53-61.

[91] P. S. Urysohn, *Sur un espace metrique universel*, Bull. Sci. Math. **51** (1927), 1–28.

[92] A. Valette, *Introduction to the Baum-Connes conjecture. From notes taken by Indira Chatterji. With an appendix by Guido Mislin.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[93] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201-240.

Index